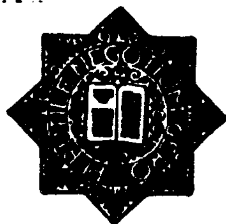
EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

13e JAARGANG 1936/37, Nr. 3.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

oppervlakte van den kegel. Deze conclusie wordt meegedeeld aan het slot van Prop. 12.

Propositie 10.

Indien aan den cirkel, die basis van den kegel is, raaklijnen worden getrokken, die in hetzelfde vlak liggen als de cirkel en die elkaar ontmoeten, en indien vanuit de raakpunten en vanuit het snijpunt der raaklijnen naar den top van den kegel rechten worden getrokken, zijn de driehoeken, begrensd door de raaklijnen en de verbindingslijnen met den top [samen] grooter dan de oppervlakte van den kegel, die door deze [verbindingslijnen] wordt afgesneden.

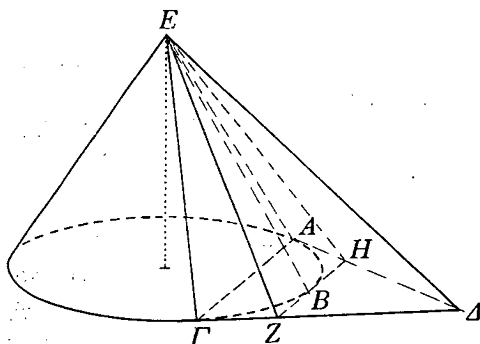


Fig. 58.

Laat (fig. 58) $E \, . \, AB\Gamma$ de gegeven rechte cirkelkegel, ΔA en $\Delta\Gamma$ raaklijnen van den grondcirkel zijn.

Gestelde: $\triangle EA\Delta + \triangle E\Gamma\Delta >$ mantelsegment $EA\Gamma$.

Bewijs: Zij B het midden van bg $A\Gamma$, HZ ($// A\Gamma$) de raaklijn van den cirkel in B. Men heeft nu

$$\Delta\Gamma + \Delta A = \Delta Z + Z\Gamma + \Delta H + HA > \Gamma Z + ZH + HA$$

dus

$$\triangle E\Delta\Gamma + \triangle E\Delta A > \triangle E\Gamma Z + \triangle EZH + \triangle EHA.$$

stel

$$\triangle E\Delta\Gamma + \triangle E\Delta A - [\triangle E\Gamma Z + \triangle EZH + \triangle EHA] = \Theta$$

dan is òf (I) $\Theta \geqq$ raaklijnsector $AHB +$ raaklijnsector $BZ\Gamma$

òf (II) $\Theta <$ raaklijnsector $AHB +$ raaklijnsector $BZ\Gamma$.

Geval I. Wegens postulaat IV geldt:

trapezium $AHZ\Gamma + \triangle EAH + \triangle EHZ + \triangle EZ\Gamma >$ cirkelsegment $AB\Gamma +$ mantelsegment $EA\Gamma$

dus:

$$\text{raaklijnsector } AHB + \text{raaklijnsector } BZ\Gamma + \triangle EAH + \triangle EHZ + \\ + \triangle EZ\Gamma > \text{mantelsegment } EA\Gamma.$$

a fortiori

$$\Theta + \triangle EAH + \triangle EHZ + \triangle EZ\Gamma > \text{mantelsegment } EA\Gamma$$

of

$$\triangle E\Delta\Gamma + \triangle E\Delta A > \text{mantelsegment } EA\Gamma.$$

Geval II. Pas op de bogen AB en $B\Gamma$ dichotomie toe, totdat de som der verkregen raaklijnsectoren kleiner wordt dan Θ (6γ). Daarna verloopt de redeneering geheel analoog aan die van Prop. 9, geval II.

Uit de bewezen propositie volgt, dat de zijdelingsche oppervlakte van een omgeschreven pyramide grooter is dan de ronde oppervlakte van den kegel. Deze conclusie wordt meegedeeld aan het slot van Prop. 12.

In de proposities 11 en 12 worden de analoge stellingen voor een cylinder met een in- resp. omgeschreven prisma op analoge wijze bewezen. Daaruit volgt dan aan het eind van Prop. 12, dat de ronde oppervlakte van een cylinder grooter is dan de zijdelingsche oppervlakte van een ingeschreven en kleiner dan die van een omgeschreven prisma.

Hierna kunnen thans de hoofdstellingen van deze groep bewezen worden.

Propositie 13.

Van elken rechten cylinder is de oppervlakte zonder de bases gelijk aan die van een cirkel, welks straal middenevenredig is tusschen de zijde van den cylinder en den diameter van de basis van den cylinder.

Zij (fig. 59) de cirkel A de basis van den cylinder, $\Gamma\Delta$ haar diameter, EZ de zijde (hoogte) van den cylinder, H de middenevenredige van $\Gamma\Delta$ en EZ, B de cirkel met straal H. Te bewijzen is, dat de ronde oppervlakte O van den cylinder gelijk is aan B.

Is dit onjuist, dan is òf (I) $B < O$ òf (II) $B > O$.

Geval I. Wegens Prop. 5 is het mogelijk, in B een gelijkzijdig

polygoon b_n en om B een gelijkzijdig polygoon B_n te beschrijven, zoodat

$$(B_n,\ b_n) < (O,\ B). \qquad (\alpha)$$

Is n zoo bepaald, beschrijf dan om den cirkel A een gelijkzijdig

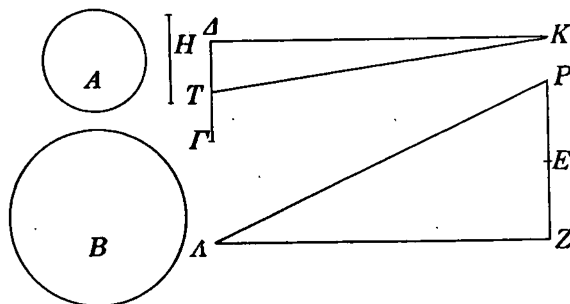


Fig. 59.

polygoon met n zijden A_n en construeer het omgeschreven prisma van den cylinder, dat A_n tot basis heeft. Zij de zijdelingsche oppervlakte hiervan P_n.

Archimedes bewijst nu

$$B_n = P_n.$$

Daar hij geen algebraische uitdrukkingen voor deze oppervlakten kan gebruiken, moeten ze beide meetkundig worden voorgesteld. Laat dus $K\Delta$ de omtrek van A_n zijn en $\Delta T = \frac{1}{2}\,\Delta\Gamma$, dan is

$$A_n = \triangle T\Delta K.$$

Zij verder $\Lambda Z = K\Delta$ en $PE = EZ$ (hoogte van den cylinder), dan is

$$P_n = \triangle\, PZ\Lambda.$$

Nu is

$$(A_n,\ B_n) = [\mathbf{T}\ (T\,\Delta),\ \mathbf{T}\ (H)]$$

waarin $\quad \mathbf{T}\ (H) = \mathbf{O}\ (\Delta\Gamma,\ EZ) = \mathbf{O}\ (T\Delta,\ PZ).$

Hieruit volgt

$$(A_n,\ B_n) = (T\Delta,\ PZ) = [\triangle\ T\Delta K,\ \ \triangle\ PZ\Lambda] = (A_n,\ P_n).$$

dus $\qquad B_n = P_n.$

Moderne notatie:

Zij $\Gamma\Delta = d$, $EZ = h$, dan is de straal van $B : H = \sqrt{dh}$.

Nu is

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{d^2}{4dh} \text{ dus } B_n = \frac{4h}{d} A_n = h \cdot \frac{A_n}{\frac{1}{4}d} = h \text{ . omtrek van } A_n = P_n.$$

De ongelijkheid (α) gaat nu over in

$$(P_n, b_n) < (O, B)$$

of

$$(P_n, O) < (b_n, B)$$

Daar nu $b_n < B$, is ook $P_n < O$ in strijd met Prop. 12.

Geval II. Bepaal nu n zoo, dat

$$(B_n, b_n) < (B, O) \qquad (\beta)$$

Beschrijf nu in den cirkel A het gelijkzijdig polygoon met n zijden a_n en construeer het ingeschreven prisma van den cylinder, dat a_n tot basis heeft. Zij de zijdelingsche oppervlakte hiervan p_n. Men vindt nu, daar het apothema van a_n kleiner is dan ΔT,

$$a_n < \triangle\, T\Delta K$$

waarin nu $K\Delta$ den omtrek van a_n voorstelt. Verder is

$$p_n = \triangle\, PZ\Delta$$

Nu is als boven:

$$(a_n, b_n) = (\triangle\, T\Delta K, \triangle\, PZ\Delta)$$

Daar verder $a_n < \triangle\, T\Delta K$, is ook $b_n < \triangle\, PZ\Delta = p_n$ (Eucl. V, 14).

Uit de ongelijkheid (β) volgt nu

$$(B_n, p_n) < (B, O).$$

of

$$(B_n, B) < (p_n, O).$$

Nu is $B_n > B$, dus $p_n > O$ in strijd met Prop. 12.

Men lette op het verschil tusschen de beide bewijzen: in geval I is de oppervlakte van het *om* B beschreven polygoon *gelijk* aan de zijdelingsche oppervlakte van het *om* den cylinder beschreven prisma; in geval I is de oppervlakte van het *in* B beschreven polygoon

kleiner dan de zijdelingsche oppervlakte van het *in* den cylinder beschreven prisma.

Propositie 14.

Van iederen gelijkbeenigen kegel is de oppervlakte zonder de basis gelijk aan den cirkel, welks straal middenevenredig is tusschen de zijde van den kegel en den straal van den cirkel, die basis van den kegel is.

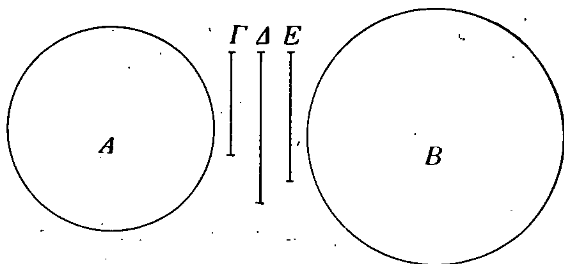


Fig. 60.

Zij (fig. 60) de cirkel A basis van den kegel, Γ zijn straal; Δ de zijde (apothema) van den kegel, E de middenevenredige van Γ en Δ, B de cirkel met straal E. Te bewijzen is, dat de ronde oppervlakte O van den kegel gelijk is aan B.

Is dit onjuist, dan is òf (I) $B < O$ òf (II) $B > O$.

Geval I. Op dezelfde wijze als in het eerste deel van Prop. 13 bepaalt men de polygonen B_n en b_n om en in B en het polygoon A_n om A. Dit laatste is basis van een om den kegel beschreven pyramide met zijdelingsche oppervlakte P_n. Nu wordt

$$(A_n, B_n) = [\mathbf{T}(\Gamma), \mathbf{T}(E)] = (\Gamma, \Delta) = (A_n, P_n)$$

dus $$B_n = P_n.$$

De verdere redeneering is geheel dezelfde als in Prop. 13.

Geval II. Te werk gaande als in het tweede deel van Prop. 13 vindt men een ingeschreven polygoon a_n van A, dat basis van een ingeschreven pyramide van den kegel met zijdelingsche oppervlakte p_n is.

Nu is weer $(a_n, b_n) = (\Gamma, \Delta)$ $\qquad (\gamma)$

Zonder bewijs wordt nu meegedeeld

$$(\Gamma, \Delta) > (a_n, p_n).$$

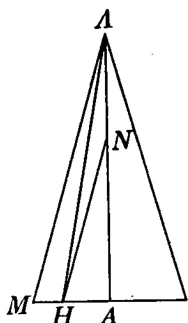


Fig. 61.

De juistheid hiervan blijkt bij beschouwing van de halve meridiaandoorsnede ΛAM van den kegel (fig. 61). Is hierin H het midden van een zijde van a_n, dan is als HN // $M\Lambda$:

$$(\Gamma, \Delta) = (AH, HN) > (AH, H\Lambda).$$

Echter is $(AH, H\Lambda) = (a_n, p_n)$, waaruit de juistheid der bewering volgt.

Uit de ongelijkheid (γ) volgt nu

$$(a_n, b_n) > (a_n, p_n)$$

dus

$$b_n < p_n.$$

De verdere redeneering is geheel dezelfde als in het tweede deel van Prop. 13.

De proposities 15—20 bevatten toepassingen en uitbreidingen van de gevonden stellingen. We korten hierin „oppervlakte van een kegel zonder de basis" af door **R.O.**

P r o p o s i t i e 15.

Van elken gelijkbeenigen kegel heeft de oppervlakte tot de basis dezelfde reden als de zijde van den kegel tot den straal van de basis van den kegel.

Is nl. van een kegel B de straal van de basis, Γ het apothema en E de middenevenredige van B en Γ, dan is de ronde oppervlakte gelijk aan den cirkel met straal E. De verhouding van ronde oppervlakte tot basis is dus gelijk aan de verhouding van **T** (E) en **T** (B), dus wegens $(\Gamma, E) = (E, B)$ ook gelijk aan de verhouding van Γ tot B.

P r o p o s i t i e 16.

Indien een gelijkbeenige kegel gesneden wordt met een vlak parallel aan de basis, dan is aan de oppervlakte van den kegel tusschen de parallele vlakken een cirkel gelijk, waarvan de straal middenevenredig is tusschen de zijde van den kegel tusschen de

parallele vlakken en een rechte, gelijk aan de som van de stralen van de cirkels in de parallele vlakken.

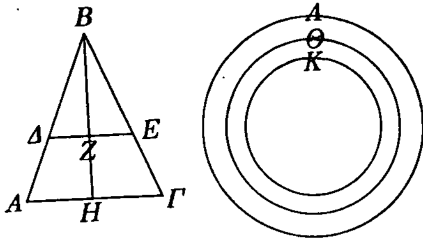


Fig. 62.

Zij (fig. 62) $AB\Gamma$ een asdoorsnede van den kegel, ΔE de doorsnede met het parallel aan de basis aangebrachte snijvlak. Zij Θ een cirkel, waarvan de straal ρ middenevenredig is tusschen $A\Delta$ en $(\Delta Z + AH)$. Te bewijzen is, dat de oppervlakte van den afgeknotten kegel gelijk is aan Θ.

Construeer

een cirkel K met straal ϱ_1, zoodat $\mathbf{T}(\varrho_1) = \mathbf{O}(B\Delta, \Delta Z)$

en een cirkel Λ met straal ϱ_2, zoodat $\mathbf{T}(\varrho_2) = \mathbf{O}(BA, AH)$

dan is, wegens Prop. 14 $\Lambda = \mathbf{R.O.}\ (BA\Gamma)$

$$K = \mathbf{R.O.}\ (B\Delta E)$$

Nu is

$\mathbf{O}(BA, AH) = \mathbf{O}(B\Delta, \Delta Z) + \mathbf{O}(A\Delta, \Delta Z + AH)$ (1) (zie Opmerking)

of

$$\mathbf{T}(\varrho_2) = \mathbf{T}(\varrho_1) + \mathbf{T}(\varrho).$$

Hieruit volgt:

$$\Lambda = K + \Theta$$

dus wegens de beteekenis van Λ en K:

$$\Theta = \mathbf{R.O.}\ (A\Delta E\Gamma).$$

Opmerking. De gelijkheid (1) blijkt uit de beschouwing van de gnomon-figuur (fig. 63), waarin BA en AH als zijden van een rechthoek zijn uitgezet. Men heeft nu:

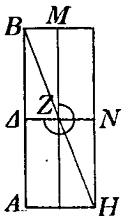


Fig. 63.

$$\mathbf{O}(BA, AH) = \mathbf{O}(B\Delta, \Delta Z) + \boldsymbol{\Gamma}(Z)$$

terwijl $\boldsymbol{\Gamma}(Z) = \mathbf{O}(A\Delta, AH) + \mathbf{O}(MN)$, dus (Eucl. I, 43)

$$= \mathbf{O}(A\Delta, AH) + \mathbf{O}(AZ)$$
$$= \mathbf{O}(A\Delta, AH) + \mathbf{O}(A\Delta, \Delta Z)$$
$$= \mathbf{O}(A\Delta, \Delta Z + AH).$$

In een propositie als deze komt duidelijk uit, welk een omslachtigheid in de redeneering vaak veroorzaakt wordt door de meet-

kundige inkleeding. Algebraisch kan immers de geheele afleiding als volgt worden samengevat:

Zij $HA = R, Z\Delta = r, BA = S, B\Delta = s,$

dan is $R : S = r : s$ of $Rs = rS$

en dus $\pi RS = \pi rs + \pi(S - s)(R + r)$ [(1) op den factor π na.]

waaruit dadelijk volgt

$$\Theta = \pi(R + r)(S - s).$$

Hierna volgen als lemmata een aantal bekende stellingen betreffende de verhoudingen van inhouden van kegels en cylinders. Het zijn de proposities Euclides XII, 11, 14, 13, 15, 12, benevens een consequentie uit Eucl. XII, 10: twee kegels verhouden zich als de cylinders, die er basis en hoogte mee gemeen hebben.

Archimedes brengt deze stellingen nu in verband met zijn eigen resultaten omtrent de oppervlakten van kegels en cylinders.

Propositie 17.

Indien bij twee gelijkbeenige kegels de oppervlakte van den eenen kegel gelijk is aan de basis van den anderen en de loodlijn uit het centrum van de basis op de zijde van den (eersten) kegel gelijk is aan de hoogte (van den tweeden), dan zullen de kegels gelijk zijn.

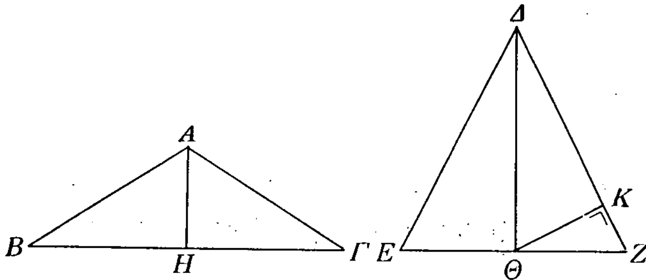


Fig. 64.

Laat (fig. 64) $AB\Gamma$ en ΔEZ asdoorsneden van de twee kegels zijn.

Gegeven: **K** $(B\Gamma)$ = **R.O.** (ΔEZ).

$$\Theta K \perp \Delta Z \,.\, AH = \Theta K.$$

Te bewijzen: kegel $AB\Gamma$ = kegel ΔEZ.

Bewijs: De bases der kegels $AB\Gamma$ en ΔEZ verhouden zich als

ronde oppervlakte en basis van ΔEZ, dus (prop. 15) als AE tot ΘE, d.i. als $\Delta\Theta$ tot ΘK of als $\Delta\Theta$ tot AH. De bases zijn dus omgekeerd evenredig met de hoogten, dus zijn de inhouden gelijk (lemma 4 voor prop. 17 = Eucl. XII, 15).

Om reeds uiteengezette redenen kan in de Grieksche wiskunde in strengheid niet gesproken worden van het product van een oppervlakte en een lengte. Vandaar, dat deze propositie een uitspraak over verhoudingen geeft, terwijl men haar tegenwoordig aldus zou formuleeren, dat de inhoud van een rechten cirkelkegel gelijk is aan het derde deel van het product van de ronde oppervlakte en den afstand van het centrum der basis tot een beschrijvende rechte.

Propositie 18.

Aan iederen stereo-rhombos, die uit gelijkbeenige kegels bestaat, is een kegel gelijk, die een basis heeft, gelijk aan de oppervlakte van den eenen kegel van die den rhombos omvatten en een hoogte gelijk aan de loodlijn, uit den top van den anderen kegel loodrecht op een zijde van den eersten getrokken.

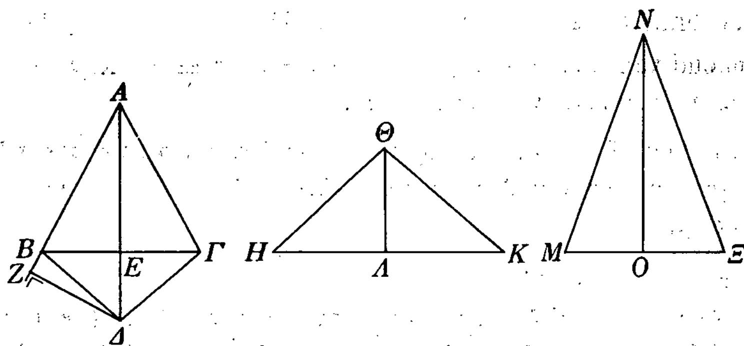


Fig. 65.

De rhombos (fig. 65) moge bestaan uit de kegels $AB\Gamma$ en $\Delta B\Gamma$, die den cirkel met diameter $B\Gamma$ tot gemeenschappelijke basis hebben. $\Delta Z \perp AB$. ΘHK is een kegel, waarvan de basis **K** (HK) gelijk is aan de ronde oppervlakte van $AB\Gamma$ en de hoogte $\Theta\Lambda$ aan ΔZ. Te bewijzen: Kegel ΘHK = rhombos $A\ (B\Gamma)\ \Delta$.

Bewijs: Contrueer een kegel $NM\Xi$, zoodat

$$M\Xi = B\Gamma$$
$$NO = A\Delta.$$

Nu is

$(AB\Gamma, \Delta B\Gamma) = (AE, \Delta E)$ (lemma 1 = Eucl. XII, 14)

Componendo (III; 0,41)

$[A(B\Gamma)\Delta, \Delta B\Gamma] = (A\Delta, \Delta E)$

Ook is

$(\Delta B\Gamma, NM\Xi) = (\Delta E, NO)$ (lemma 1 = Eucl. XII, 14)

Dus *ex aequali* (III; 0,45)

$[A(B\Gamma)\Delta, NM\Xi] = (A\Delta, NO)$ en wegens $A\Delta = NO$

$A(B\Gamma)\Delta = NM\Xi$ (α)

Verder is

$[\mathbf{K}(HK), \mathbf{K}(M\Xi)] = [\mathbf{R.O.}(AB\Gamma), \mathbf{K}(B\Gamma)] = (AB, BE) =$
$= (A\Delta, \Delta Z) = (NO, \Theta\Lambda)$.

Dus (lemma 4 = Eucl. XII, 15)

$$\Theta HK = NM\Xi$$

en wegens (α)

$$\Theta HK = A(B\Gamma)\Delta.$$

Algebraïsch: Is $BE = R$, $A\Delta = h$, $AB = s$, $\Delta Z = p$, dan is:
Inhoud van rhombos $A\,(B\Gamma)\,\Delta = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi Rsp = \frac{1}{3} p$. Ronde Oppervlakte van kegel $AB\Gamma$.

Stelt men $Rs = \varrho^2$, dan blijkt de inhoud van den rhombos gelijk te zijn aan dien van den rechten cirkelkegel met basisstraal ϱ en hoogte p.

Propositie 19.

Indien een gelijkbeenige kegel gesneden wordt met een vlak parallel aan de basis, indien op den ontstanen cirkel een kegel wordt beschreven, die het centrum der basis tot top heeft en indien de verkregen rhombos van den geheelen kegel wordt afgenomen, dan zal aan het overblijvende deel een kegel gelijk zijn, die een basis heeft, gelijk aan de oppervlakte van den kegel tusschen de parallele vlakken en een hoogte, gelijk aan de lijn, uit het centrum van de basis loodrecht op een zijde van den kegel getrokken.

Zij (fig. 66) $BA\Gamma$ de asdoorsnede van den gegeven kegel, ΔE de doorsnede van het snijvlak, $ZH \perp AB$, $K\Theta\Lambda$ de asdoorsnede van een kegel, zoodat

$$\mathbf{K}\,(\Theta\Lambda) = \mathbf{R.O.}\,(A\Delta E\Gamma) \quad \text{en} \quad K\Sigma = ZH$$

Te bewijzen is

$$\text{Kegel } BA\Gamma \;-\; \text{Rhombos } B\ (\Delta E)\ Z = \text{Kegel } K\Theta\Lambda$$

Bewijs: Construeer een kegel ΞMN met **K** (MN) = **R.O.** $(AB\Gamma)$ en hoogte $= ZH$.

en een kegel ΠOP met **K** (OP) = **R.O.** $(B\Delta E)$ en hoogte $= ZH$.

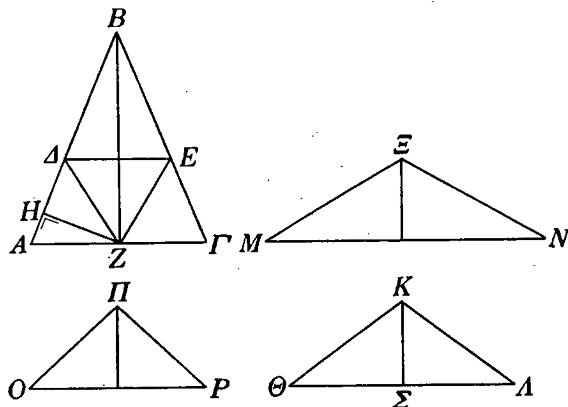


Fig. 66.

Dan is (Prop. 17)

$$\Xi MN = BA\Gamma$$

en (Prop. 18)

$$\Pi OP = B(\Delta E)Z.$$

Bovendien is (Lemma 1 = Euclides XII, 11)

$$\Xi MN = K\Theta\Lambda + \Pi OP.$$

Dus is

$$K\Theta\Lambda = \Xi MN - \Pi OP = BA\Gamma - B(\Delta E)Z.$$

Algebraisch: Is $ZH = p$, dan is

$$\text{Kegel } BA\Gamma - \text{Rhombos } B(\Delta E)Z = \tfrac{1}{3}p[\mathbf{R.O.}(BA\Gamma) - \mathbf{R.O.}(B\Delta E)] = \tfrac{1}{3}p \,.\, \mathbf{R.\,O.}\ (A\Delta E\Gamma).$$

Propositie 20.

Indien van een rhombos, die uit gelijkbeenige kegels bestaat, de eene kegel gesneden wordt met een vlak parallel aan de basis, indien op den ontstanen cirkel een kegel wordt beschreven, die denzelfden top heeft als de andere kegel en indien de verkregen rhom-

bos van den geheelen rhombos wordt afgenomen, dan is aan het overblijvende deel een kegel gelijk, die een basis heeft, gelijk aan de oppervlakte van den eersten kegel tusschen de parallele vlakken en een hoogte, gelijk aan de lijn, uit den top van den tweeden kegel loodrecht op de zijde van den eersten getrokken.

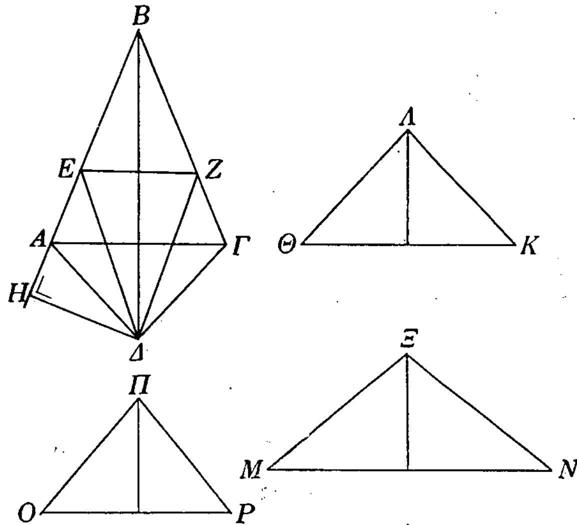


Fig. 67.

Zij (fig. 67) $B(A\Gamma)\Delta$ asdoorsnede van den gegeven rhombos, EZ de doorsnede van het snijvlak, $B(EZ)\Delta$ asdoorsnede van den geconstrueerden rhombos. $\Delta H \perp BA$. Is nu $\Lambda\Theta K$ een kegel met basis **K** (ΘK) = **R.O.** $(AEZ\Gamma)$ en hoogte = ΔH, dan is te bewijzen:

$$B\,(A\Gamma)\Delta \;-\; B\,(EZ)\,\Delta = \Lambda\Theta K.$$

Bewijs: Construeer een kegel ΞMN met basis **K**(MN)=**R.O.**$(BA\Gamma)$ en hoogte = ΔH.

en een kegel ΠOP met basis **K**(OP)=**R.O.**(BEZ) en hoogte = ΔH.

dan is (Prop. 18)

$$\Xi MN = B(A\Gamma)\,\Delta$$
$$\Pi OP = B(EZ)\,\Delta$$

terwijl tevens

$$\Xi MN = \Lambda\Theta K + \Pi OP.$$

Hieruit volgt:

$$\Lambda\Theta K = B(A\Gamma)\Delta - B(EZ)\Delta.$$

Algebraisch: Is $\Delta H = p$, dan is

Rhombos $B(A\Gamma)\Delta$ — Rhombos $B(EZ)\Delta = \frac{1}{3}p\,[\textbf{R.O.}\,(BA\Gamma) -$
$\textbf{R.O.}\,(BEZ)] = \frac{1}{3}p.\,\textbf{R.O.}\,(AEZ\Gamma)$.

De proposities 18—20 zijn samen aequivalent met de thans in de elementaire stereometrie gebruikelijke stelling, volgens welke de inhoud van het lichaam, dat ontstaat, wanneer een driehoek wentelt om een as in zijn vlak door een zijner hoekpunten, gelijk is aan het derde deel van het product van de oppervlakte, beschreven door de zijde tegenover het hoekpunt op de as en de loodlijn uit dat hoekpunt op die zijde neergelaten.

6. **Oppervlakte en Inhoud van den Bol. Proposities 21—34.**

Met Prop. 21 begint een nieuwe groep proposities, die tot de afleiding van stellingen over oppervlakte (Prop. 33) en inhoud (Prop. 34) van den bol voeren. De kennismaking met deze groep wordt bemoeilijkt door een onoverzichtelijke rangschikking. We zullen daarom eerst den gang van het betoog in groote lijnen schetsen.

De grondgedachte bestaat hierin, dat de oppervlakte en de inhoud van den bol vergeleken worden met de oppervlakten, resp. de inhouden van de lichamen, die ontstaan, wanneer men regelmatige veelhoeken, die in een grooten cirkel van den bol beschreven zijn en waarvan het aantal zijden door vier deelbaar is, laat wentelen om een diagonaal, die middellijn van den bol is. Het door de wenteling van het ingeschreven polygoon I_n verkregen lichaam wordt, zooals in Prop. 23 nader wordt uiteengezet, ingesloten door deelen van kegelmantels, waarvan de begrenzende cirkels in evenwijdige vlakken op het boloppervlak liggen. Bij wenteling van het omgeschreven polygoon C_n ontstaat, zooals in Prop. 28 wordt betoogd, een dergelijk lichaam, waarvan nu echter de begrenzende kegelvormige manteldeelen langs cirkels, in evenwijdige vlakken gelegen, aan den bol raken, terwijl het geheele lichaam op de wijze van Prop. 23 beschreven is in een bol, die met den gegeven bol concentrisch is en een grooteren straal heeft dan deze. We noemen nu verder de oppervlakten van de door I_n en C_n beschreven lichamen resp. **E** (I_n) en **E** (C_n), de oppervlakte van den

gegeven bol zelf **E**, de inhouden van de door I_n en C_n beschreven lichamen, alsmede deze lichamen zelf, **S** (I_n) en **S**(C_n), den inhoud van den bol, evenals den bol zelf, **S** [34]).

We schetsen nu eerst de redeneering, die tot de oppervlakte van den bol voert.

Op de kegelvormige oppervlakken, die door de zijden van I_n bij wenteling beschreven worden, zijn de proposities 14 (grootte van een kegelmantel) en 16 (grootte van een afgeknotten kegelmantel) van toepassing. Met behulp van deze stellingen wordt nu in Prop. 24 een uitdrukking voor **E** (I_n) afgeleid, die, in Prop. 25 herleid op grond van een in Prop. 21 gevonden planimetrische hulpstelling, tot het resultaat voert, dat **E** (I_n) kleiner is dan de oppervlakte van een cirkel **A**, die den diameter van den bol tot straal heeft en die dus vier maal zoo groot is als een groote cirkel van den bol. Daar verder **E** (C_n) toch ook weer ingeschreven is aan een bol (met grooteren straal), kan het verkregen resultaat ook hierop toegepast worden. Dat geschiedt in Prop. 29. In Prop. 30 wordt daaruit afgeleid, dat **E** (C_n) grooter is dan **A**.

Intusschen is door toepassing van het vierde postulaat in Prop. 23 ingezien, dat **E** (I_n) kleiner is dan de oppervlakte **E** van den bol, evenzoo in Prop. 28, dat **E** (C_n) grooter is dan **E**. De verkregen resultaten zijn als volgt samen te vatten:

$$\mathbf{E}\ (I_n) < \mathbf{A} < \mathbf{E}\ (C_n)$$
$$\mathbf{E}\ (I_n) < \mathbf{E} < \mathbf{E}\ (C_n)$$

Hierna wordt nu in Prop. 33 volgens de compressiemethode (redenvorm; III; 8,21) door een dubbele reductio ad absurdum de hoofdstelling

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}$$

bewezen. Als hulpstelling wordt daarbij het in Prop. 32 afgeleide resultaat gebruikt, dat de reden van **E** (I_n) en **E** (C_n) de dubbelreden is van die der zijden z_n en Z_n der polygonen I_n en C_n.

Om tot den inhoud van den bol te komen, wordt als volgt geredeneerd: In Prop. 26 wordt met behulp van de proposities 18 en 20 gevonden, dat de inhoud **S** (I_n) gelijk is aan dien van een kegel, waarvan de basis gelijk is aan **E** (I_n) en de hoogte gelijk aan den straal R van den bol. Daaruit volgt in Prop. 27 op grond van de

---

[34]) **E** van ἐπιφάνεια. **S** van στερεόν.

boven reeds vermelde Prop. 25, dat **S** (I_n) kleiner is dan een kegel **X**, waarvan de basis gelijk is aan **E** en de hoogte aan R en in Prop. 31 op dezelfde wijze, dat **S** (C_n) grooter is dan die kegel. Zonder vermelding wordt verder aangenomen, dat **S** (I_n) kleiner is dan de bol zelf en **S** (C_n) grooter dan deze. Men heeft dan dus de ongelijkheden

$$\mathbf{S}\ (I_n) < \mathbf{X} < \mathbf{S}\ (C_n)$$
$$\mathbf{S}\ (I_n) < \mathbf{S} < \mathbf{S}\ (C_n)$$

waaruit in Prop. 34 door een dubbele reductio ad absurdum (verg. III; 8,21) de hoofdstelling

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}$$

wordt afgeleid. Daarbij wordt gebruik gemaakt van het in Prop. 32 afgeleide resultaat, dat de reden van **S** (I_n) en **S** (C_n) de tripelreden is van die der zijden z_n en Z_n der polygonen I_n en C_n.

We kunnen thans zonder gevaar voor onduidelijkheid de proposities in de volgorde, waarin Archimedes ze geeft, meedeelen, waarbij alleen nog moet worden opgemerkt, dat Prop. 22 pas zal worden toegepast in de theorie van den bolsector, die met Prop. 35 begint.

P r o p o s i t i e 21.

Indien in een cirkel een polygoon wordt beschreven met gelijke zijden in even aantal en er worden rechten getrokken, die de hoekpunten van het polygoon verbinden, zoo dat ze parallel zijn aan een willekeurige van < de rechten > die zich onder twee zijden van het polygoon spannen, dan hebben alle verbindingslijnen < samen > tot den diameter van den cirkel de reden, welke de rechte, die de helft der zijden op een na onderspant, tot de zijde van het polygoon heeft.

Is (fig. 68) $AEZ\ .\ .\ .\ .\ .\ K$ de gegeven regelmatige veelhoek in den cirkel en zijn EK, $Z\Lambda$ enz. de bedoelde onderling evenwijdige koorden (die den diameter $A\Gamma$ opv. in Ξ, Π enz. snijden), dan is te bewijzen

$$(EK + Z\Lambda + B\Delta\ .\ .\ .\ .\ \Theta M,\ A\Gamma) = (E\Gamma\ AE).$$

Bewijs: Trekt men de onderling evenwijdige koorden KZ, ΛB enz., die den diameter $A\Gamma$ opv. in O, P enz. snijden, dan is wegens gelijkvormigheid van driehoeken.

$$(E\Xi, \Xi A) = (K\Xi, \Xi O) = \ldots\ldots = (MX, X\Gamma)$$

dus

$$(E\Xi + K\Xi + \ldots\ldots + MX, A\Xi + \Xi O + \ldots\ldots X\Gamma) = (E\Xi, \Xi A) = (E\Gamma, AE)$$

of

$$(EK + Z\Lambda + \ldots\ldots \Theta M, A\Gamma) = (E\Gamma, AE)\ldots$$

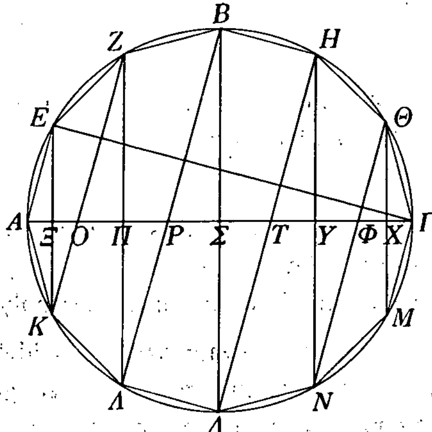


Fig. 68.

Goniometrische notatie: Is het aantal zijden van het polygoon $2n$, dan is

$$EK = 2R \sin \frac{\pi}{n},\ Z\Lambda = 2R \sin \frac{2\pi}{n}, \ldots \Theta M = 2R \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$$

terwijl

$$\frac{E\Gamma}{AE} = \cot \frac{\pi}{2n}.$$

De bewezen stelling luidt dus

$$\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \ldots\ldots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \cot \frac{\pi}{2n}.$$

P r o p o s i t i e 22.

Indien in een cirkelsegment een polygoon wordt beschreven, dat de zijden, behalve de basis, gelijk heeft en in even aantal, en er worden rechten getrokken, parallel aan de basis, die de hoekpunten van het polygoon verbinden, dan hebben al de getrokken rechten en de helft van de basis < samen > tot de hoogte van het segment dezelfde reden als de rechte, van den diameter van den cirkel naar

de zijde van het polygoon getrokken, tot de zijde van het polygoon heeft.

De formuleering van het laatste deel der stelling is onduidelijk; bedoeld wordt de rechte, uit het uiteinde Δ van den diameter $B\Delta$, naar het uiteinde Z van de zijde BZ getrokken.

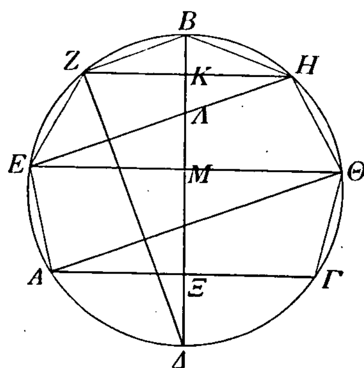


Fig. 69.

Is (fig. 69) $AB\Gamma$ het gegeven segment, dan is te bewijzen:

$$(ZH + E\Theta + A\Xi, B\Xi) = (\Delta Z, ZB).$$

Het bewijs verloopt geheel als in Prop. 21. In goniometrische schrijfwijze luidt de stelling:

Is bg $AB\Gamma = 2\alpha$ en het aantal zijden van het polygoonstuk $A \ldots . \Gamma\ 2n$, dan is

$$\frac{2\left[\sin\frac{\alpha}{n} + \sin\frac{2\alpha}{n} + \ldots . \sin\frac{n-1}{n}\alpha\right] + \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \cot\frac{\alpha}{2n}$$

welke gelijkheid voor $\alpha = \pi$ overgaat in die van stelling 21.

P r o p o s i t i e 23.

In deze propositie, die in vorm van het gewone type afwijkt, doordat er geen bepaalde stelling wordt geformuleerd, maar de verlangde conclusie al redeneerende wordt verkregen, wordt betoogd (fig. 68), dat de oppervlakte van het lichaam, dat door wenteling van het ingeschreven polygoon $A \ldots B \ldots \Gamma \ldots \Delta$ om den diameter $A\Gamma$ wordt voortgebracht, kleiner is dan de oppervlakte van den bol. Dit volgt onmiddellijk uit het vierde postulaat, telkens toegepast op de oppervlakten van een bolschijf (of bolsegment) en een afgeknotten kegel (of kegel), die denzelfden cirkel tot rand hebben.

P r o p o s i t i e 24.

De oppervlakte van het in den bol beschreven lichaam is gelijk aan een cirkel, waarvan het straalvierkant gelijk is aan den recht-

hoek, omvat door de zijde van de (wentelende) figuur en een rechte, gelijk aan < de som van > alle verbindingslijnen, die parallel zijn aan de rechte, die zich onder twee zijden van het polygoon spant.

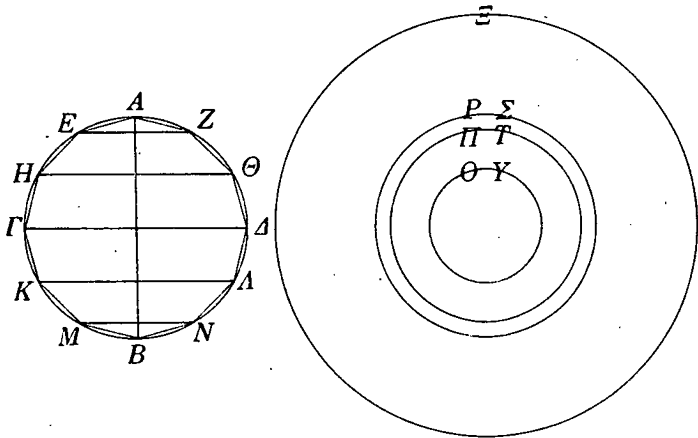


Fig. 70.

Zij (fig. 70) $AZ \ldots E$ het polygoon I_n, wentelend om AB. Is nu Ξ de cirkel, in de propositie vermeld, dan is te bewijzen

$$\mathbf{E}\,(I_n) = \Xi$$

Bewijs: Construeer cirkels O, Π, P, Σ, T, Y, zoodat de vierkanten, op hun stralen als zijden beschreven, opv. gelijk zijn aan de rechthoeken

$$\mathbf{O}\,(AE, \tfrac{1}{2}\,EZ), \mathbf{O}\left(AE, \frac{EZ + H\Theta}{2}\right) \ldots . \mathbf{O}\,(AE, \tfrac{1}{2}\,MN)$$

dan stellen deze cirkels op grond van de Prop. 14 en 16 de oppervlakten voor, die opv. door AE, $EH \ldots MB$ beschreven worden. De som van de genoemde vierkanten is gelijk aan den rechthoek

$$\mathbf{O}\,(AE, EZ + H\Theta + \ldots\ldots + MN)$$

en dus gelijk aan het vierkant, op den straal van Ξ als zijde beschreven. Hieruit volgt:

$$\Xi = O + \Pi + P + \Sigma + T + Y$$

of

$$\mathbf{E}\,(I_n) = \Xi.$$

Algebraisch:

$$\mathbf{E}\,(I_n) = \pi \,.\, AE\, \frac{EZ}{2} + \pi \,.\, EH \,.\, \frac{EZ + H\Theta}{2} + \ldots . \pi \,.\, MB \frac{MN}{2} =$$
$$\pi \,.\, AE\,(EZ + H\Theta + \ldots . MN).$$

Propositie 25.

De oppervlakte van het in den bol beschreven lichaam, dat omvat wordt door de kegelvormige oppervlakken, is kleiner dan het viervoud van den grootsten cirkel van den bol.

Bewijs: Zij (fig. 68) **P** een cirkel, waarvan het straalvierkant gelijk is aan

$$\mathbf{O}\,(AE, EK + Z\Lambda + \ldots . \Theta M),$$

K een cirkel met diameter $A\Gamma$,

dan is wegens Prop. 24

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\,(I_n).$$

Wegens Prop. 21 (in verband met Euclides VI, 16) is echter

$$\mathbf{O}\,(AE, EK + Z\Lambda + \ldots . \Theta M) = \mathbf{O}\,(A\Gamma, \Gamma E) < \mathbf{T}\,(A\Gamma)$$

dus is $\mathbf{P} < 4 \,.\, \mathbf{K}$

Algebraisch:

$$\mathbf{E}\,(I_n) = \pi \,.\, AE\,(EK + Z\Lambda + \ldots . \Theta M] =$$
$$\text{(Prop. 21)}\ \pi . A\Gamma \,.\, \Gamma E < \pi \,.\, A\Gamma^2 = 4\,\pi \,.\, \Sigma A^2.$$

Propositie 26.

Aan het in den bol beschreven lichaam, dat omvat wordt door de

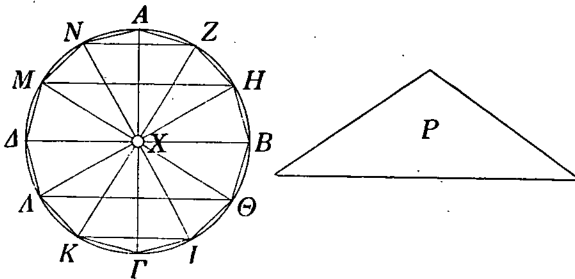


Fig. 71.

kegelvormige oppervlakken, is een kegel gelijk, die tot basis heeft den cirkel, gelijk aan de oppervlakte van het lichaam, in den bol

beschreven en de hoogte gelijk aan de lijn, uit het middelpunt van den bol loodrecht op een zijde van het polygoon getrokken.

Bewijs (fig. 71): Zij P de kegel, waarvan de basis gelijk is aan **E** (I_n) en de hoogte aan de loodlijn r uit X op AN.

Het lichaam wordt nu beschouwd als opgebouwd uit

1). Rhombos $X(NZ)A$, die volgens Prop. 18 gelijk is aan een kegel met basis **E** (AZ) en hoogte r.

2). Rhombosrest met top X en basis **E** (ZH), volgens Prop. 20 gelijk aan een kegel met basis **E** $(MNHZ)$ en hoogte r.

3). Kegelrest met top X en basis **E** $(M\Delta HB)$, volgens Prop. 19 gelijk aan een kegel met basis **E** $(M\Delta HB)$ en hoogte r.

Zoo ook in de andere helft van den bol.

Door optelling volgt het gestelde.

Propositie 27.

Het in den bol beschreven lichaam, dat omvat wordt door de kegelvormige oppervlakken is kleiner dan het viervoud van den kegel, die een basis heeft gelijk aan den grootsten cirkel van den bol en een hoogte, gelijk aan den straal van den bol.

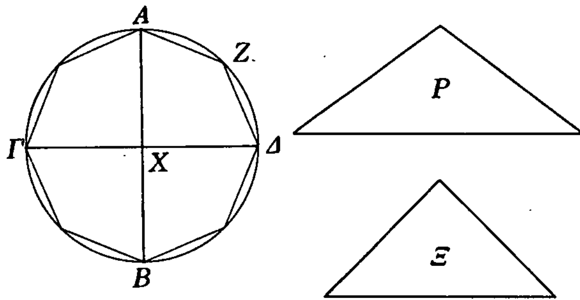


Fig. 72.

Bewijs (fig. 72): Zij P de kegel met basis **E** (I_n) en hoogte r, Ξ een kegel, die den cirkel X tot basis heeft en een hoogte, gelijk aan XA.

Daar nu	**E** $(I_n) < 4 \,.\, X$	en $r < R$
is	$P < 4 \,.\, \Xi$	
dus	**S** $(I_n) < 4 \,.\, \Xi$.	

Propositie 28.

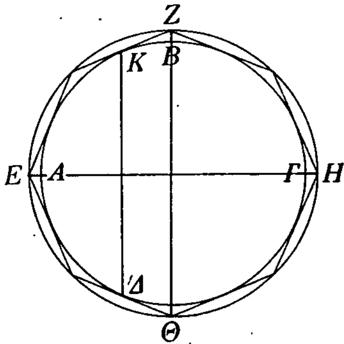


Fig. 73.

In deze propositie (fig. 73), die evenals Prop. 23 in afwijkenden vorm gesteld is, wordt een polygoon met $4n$ zijden beschouwd (C_n), dat om een grooten cirkel $AB\Gamma\Delta$ van een bol beschreven is en met dezen cirkel om EH wentelt. C_n brengt een lichaam voort, dat om den bol beschreven is. Hiervan wordt beweerd

$$\mathbf{E}\ (C_n) > \mathbf{E}.$$

Dit volgt onmiddellijk uit het vierde postulaat, toegepast op de deelen van het lichaam en den bol, aan weerszijden van het vlak van den cirkel met diameter $K\Delta$.

Propositie 29.

Aan de oppervlakte van het lichaam, beschreven om den bol, is een cirkel gelijk, waarvan het straalvierkant gelijk is aan den rechthoek, omvat door een zijde van het polygoon en een rechte gelijk aan < de som van > alle verbindingslijnen van hoekpunten van het polygoon, parallel aan een van de lijnen, die zich onder twee zijden van het polygoon spannen.

Daar C_n toch ook weer ingeschreven is aan een anderen cirkel, is deze stelling identiek met die van Prop. 24.

Propositie 30.

Van het lichaam, dat om den bol beschreven is, is de oppervlakte grooter dan het viervoud van den grootsten cirkel van den bol.

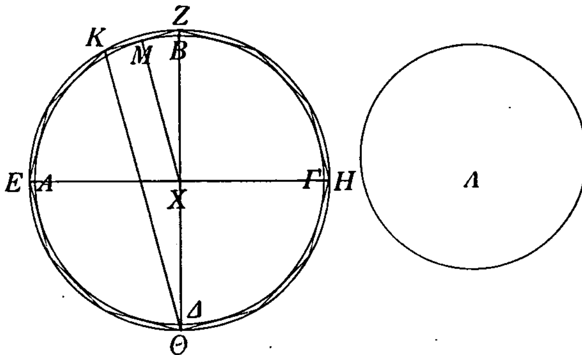


Fig. 74.

Bewijs (fig. 74): Zij de beschouwde oppervlakte gelijk aan die van cirkel Λ. Op geheel dezelfde wijze als in Prop. 25 volgt nu uit de Prop. 21 en 29, dat het straalvierkant van Λ gelijk is aan $\mathbf{O}$ $(Z\Theta, \Theta K)$.

Dus is de straal van Λ grooter dan ΘK, die zelf gelijk is aan $B\Delta$. Dus is

$$\Lambda > 4 \text{ . oppervlakte van een grooten cirkel.}$$

Dat ΘK gelijk is aan $B\Delta$, volgt uit $\Theta K = 2\ XM$.

Propositie 31.

Aan het lichaam, om den kleinsten bol beschreven, is een kegel gelijk, die als basis een cirkel heeft, die gelijk is aan de oppervlakte van het lichaam en de hoogte gelijk aan den straal van den bol.

Dit volgt onmiddellijk uit Prop. 26. In een Porisma wordt met behulp van Prop. 30 geconcludeerd tot

$$\mathbf{S}\ (C_n) > \mathbf{X}$$

waarin $\mathbf{X}$ volgens afspraak een kegel voorstelt, waarvan de basis gelijk is aan de oppervlakte $\mathbf{E}$ van den bol en de hoogte aan den straal.

Propositie 32.

Indien in een bol een lichaam beschreven is en een ander er om en beide lichamen zijn op dezelfde wijze als boven door gelijkvormige polygonen voortgebracht, dan heeft de oppervlakte van het omgeschreven lichaam tot de oppervlakte van het ingeschreven lichaam de dubbelreden van die de zijde van het polygoon, beschreven om den grootsten cirkel, tot de zijde van het in denzelfden cirkel beschreven polygoon heeft en het < omgeschreven > lichaam zelf heeft tot het < ingeschreven > lichaam de tripelreden van dezelfde reden.

Bewijs (fig. 75): 1e Deel.

Zij
$$M = \mathbf{E}\ (C_n)$$
$$N = \mathbf{E}\ (I_n)$$

dan is

$$\text{straalvierkant van } M = \mathbf{O}\ (E\Lambda,\ \Lambda M + Z\Theta\ + \ldots .)$$
$$\text{straalvierkant van } N = \mathbf{O}\ (AK,\ KN + B\Delta\ + \ldots .)$$

Daar de polygonen gelijkvormig zijn, zijn de rechthoeken $\mathbf{O}$ dit

ook, dus, daar de verhouding (*M, N*) gelijk is aan die van hun straalvierkanten en dus aan die der genoemde rechthoeken, is de bedoelde verhouding volgens Euclides VI, 20 de dubbelreden van $(E\Lambda, AK)$.

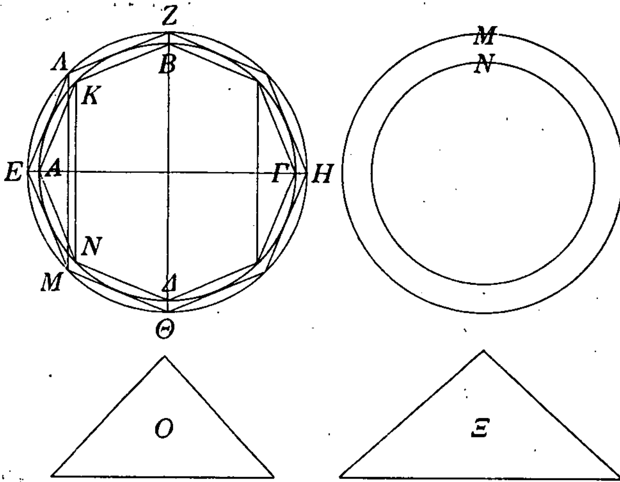


Fig. 75.

2e Deel. Laat nu Ξ en O twee kegels zijn, waarvan de bases resp. gelijk zijn aan M en aan N, de hoogten resp. aan den bolstraal en aan de loodlijn uit het centrum op AK neergelaten, dan is het omgeschreven lichaam gelijk aan Ξ (Prop. 31), het ingeschreven aan O (Prop. 26). Daar de polygonen, om en in den cirkel beschreven, gelijkvormig zijn, is de verhouding van Z_n tot z_n dezelfde als die van de hoogten der kegels en van de diameters van hun bases. Volgens Euclides XII, 12 is de reden der kegels dus de tripelreden van $(E\Lambda, AK)$.

Algebraisch:

$$\frac{\mathbf{E}\,(C_n)}{\mathbf{E}\,(I_n)} = \frac{E\Lambda\,.\,[AM + Z\Theta + \ldots.]}{AK\,.\,[KN + B\Delta + \ldots.]} = \left(\frac{E\Lambda}{AK}\right)^2$$

$$\frac{\mathbf{S}\,(C_n)}{\mathbf{S}\,(I_n)} = \frac{R\,.\,\mathbf{E}\,(C_n)}{r\,.\,\mathbf{E}\,(I_n)} = \left(\frac{E\Lambda}{AK}\right)^3$$

waarin R den straal van den om AKB . . . beschreven cirkel voorstelt en r het apothema van dezen veelhoek.

Hierna volgen nu de twee hoofdstellingen:

Propositie 33.

Van elken bol is de oppervlakte viermaal zoo groot als die van zijn grootsten cirkel.

Zij **A** een cirkel, waarvan de straal gelijk is aan den diameter van den bol: Te bewijzen is

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}.$$

Is dit onjuist, dan is òf (I) $\mathbf{A} < \mathbf{E}$ òf (II) $\mathbf{A} > \mathbf{E}$.

Geval I. Zij dus $\mathbf{A} < \mathbf{E}$. Construeer twee lijnstukken B, Γ $(B > \Gamma)$ zoodat

$$(B, \Gamma) < (\mathbf{E}, \mathbf{A}) \qquad \text{(Prop. 2)}$$

en een lijnstuk Δ, zoodat

$$(B, \Delta) = (\Delta, \Gamma).$$

Bepaal n zoo, dat als Z_n en z_n de zijden zijn van C_n en I_n

$$(Z_n, z_n) < (B, \Delta) \qquad \text{(Prop. 3)}$$

Dan is

$$[\mathbf{E}(C_n), \mathbf{E}(I_n)] < \Delta\Delta\ (B, \Delta) = (B, \Gamma) \qquad \text{(Prop. 32)}$$

dus

$$[\mathbf{E}\ (C_n), \mathbf{E}\ (I_n)] < (\mathbf{E}, \mathbf{A}) \qquad (\alpha)$$

Echter is

$$\mathbf{E}\ (C_n) > \mathbf{E} \qquad \text{(Prop. 28)}$$

en

$$\mathbf{E}\ (I_n) < \mathbf{A} \qquad \text{(Prop. 25)}$$

waardoor een contradictie met de ongelijkheid (α) is verkregen. Immers deze laatste is te schrijven

$$[\mathbf{E}\ (C_n), \mathbf{E}] < [\mathbf{E}\ (I_n), \mathbf{A}]$$

en daar $\mathbf{E}\ (I_n) < \mathbf{A}$ is, zou a fortiori $\mathbf{E}\ (C_n) < \mathbf{E}$ moeten zijn.

Geval II. Zij dus

$$\mathbf{A} > \mathbf{E}$$

Als boven te werk gaande, bepaalt men n zoo, dat

$$[\mathbf{E}\ (C_n), \mathbf{E}\ (I_n)] < (\mathbf{A}, \mathbf{E}) \qquad (\beta)$$

Echter is $\mathbf{E}\ (C_n) > \mathbf{A}$ (Prop. 30) en $\mathbf{E}\ (I_n) < \mathbf{E}$ (Prop. 23), waardoor de onmogelijkheid van de ongelijkheid (β) blijkt.

Propositie 34.

Elke bol is viermaal zoo groot als de kegel, die een basis heeft gelijk aan den grootsten cirkel van den bol en een hoogte gelijk aan den straal van den bol.

Zij Ξ de bedoelde kegel, dan is te bewijzen

$$\mathbf{S} = 4\Xi$$

of, volgens de boven ingevoerde notatie,

$$\mathbf{S} = \mathbf{X}$$

Is dit onjuist, dan is òf (I) $\mathbf{X} < \mathbf{S}$ òf (II) $\mathbf{X} > \mathbf{S}$.

Geval I. Zij dus $\mathbf{X} < \mathbf{S}$.

Construeer twee lijnstukken K, H, $(K > H)$ zoodat

$$(K, H) < (\mathbf{S}, \mathbf{X}) \qquad \text{(Prop. 2)}$$

en daarna twee lijnstukken I, Θ, zoodat K, I, Θ H een rekenkundige reeks vormen. Bepaal nu n zoo, dat

$$(Z_n, z_n) < (K, I) \qquad \text{(Prop. 3)}$$

dan is wegens Prop. 32

$$[\mathbf{S}(C_n), \mathbf{S}(I_n)] = \mathbf{T}\Lambda \,.\, (Z_n, z_n) < \mathbf{T}\Lambda \,.\, (K, I) < (K, H).$$ [35]

Nu is dus

$$[\mathbf{S}(C_n), \mathbf{S}(I_n)] < (\mathbf{S}, \mathbf{X}). \qquad (\alpha)$$

Echter is

$$\mathbf{S}(C_n) > \mathbf{S} \qquad \text{(post. 4)}$$
$$\mathbf{S}(I_n) < \mathbf{X} \qquad \text{(Prop. 27)}$$

wat in strijd is met de ongelijkheid (α).

Geval II. Zij dus $\mathbf{X} > \mathbf{S}$. Als boven vindt men nu

$$[\mathbf{S}(C_n), \mathbf{S}(I_n)] < (\mathbf{S}, \mathbf{X}). \qquad (\beta)$$

Echter is

$$\mathbf{S}(C_n) > \mathbf{X} \qquad \text{(Prop. 31)}$$
$$\mathbf{S}(I_n) < \mathbf{S} \qquad \text{(post. 4)}$$

wat in strijd is met de ongelijkheid (β).

Algebraisch:

$$\mathbf{S} = 4 \,.\, \tfrac{1}{3}\pi R^2 \,.\, R.$$

In een Porisma wordt de eigenschap uitgesproken, die Archi-

---

[35]) De juistheid van de laatste ongelijkheid blijkt als volgt: Denk een afdalende rekenkundige reeks

$$K, I, \Theta, H.$$

en vorm hierbij een meetkundige reeks

$$K, I, \Lambda, M.$$

Dan is $\Lambda > \Theta$, omdat het meetkundig gemiddelde van K en Λ gelijk aan het rekenkundig gemiddelde van K en Θ. Verder is $I - \Lambda > \Lambda - M$, dus zeker $I - \Theta > \Lambda - M$, dus $\Theta - H > \Lambda - M$ en wegens $\Theta < \Lambda$ zeker $H < M$. Nu is

$$(K, H) > (K, M) = \mathbf{T}\Lambda\ (K, I).$$

medes op zijn grafsteen afgebeeld wilde hebben[36]): van een cylinder, die een grooten cirkel van den bol tot basis heeft en waarvan de hoogte gelijk is aan den diameter, is de totale oppervlakte anderhalfmaal zoo groot als de oppervlakte van den bol en de inhoud anderhalf zoo groot als zijn inhoud.

Algebraisch:

$$a)\quad 2\pi R \,.\, 2R + 2\pi R^2 = 6\pi R^2 = \tfrac{3}{2}\,\mathbf{E}$$

$$b)\quad \pi R^2 \,.\, 2R = 2\pi R^3 = \tfrac{3}{2} \,.\, \tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{3}{2}\mathbf{S}.$$

7. **Oppervlakte van het bolsegment en inhoud van den bolsector. Proposities 35—44.**

We komen thans tot een groep proposities uit Boek I van het geschrift *Over Bol en Cylinder,* waarin stellingen worden afgeleid over de oppervlakte van een bolsegment en over den inhoud van een bolsector. De gang van het bewijs is in hoofdzaak parallel aan die van de voorafgaande groep, waarin de oppervlakte en de inhoud van den bol werden behandeld. Inplaats van volledige in- en omgeschreven polygonen worden nu echter polygoonstukken beschouwd, in- en omgeschreven aan den boog van den cirkelsector, door welks wenteling de te behandelen bolsector ontstaat. Daar de inkleeding der nu ter sprake komende proposities slechts in onbelangrijke mate afwijkt van die der voorafgaande groep, zullen we ze niet in extenso vermelden, maar de geheele redeneering tot een samenhangend betoog verwerken.

Naar analogie met Prop. 24 wordt eerst in Prop. 35 een uitdrukking afgeleid voor de oppervlakte $\mathbf{E}$ (I_n) van het lichaam, dat door wenteling van het ingeschreven polygoonstuk I_n ontstaat (Fig. 76). Op grond van de proposities 14 en 16 vindt men, dat de oppervlakten, die door ΘE, $E\Gamma$, $\Gamma\Lambda$ doorloopen worden, opv. gelijk zijn aan cirkels, welker straalvierkanten opv. gelijk zijn aan

Fig. 76.

$$\mathbf{O}\,(E\Theta, \tfrac{1}{2}EZ),\ \mathbf{O}\left(E\Gamma, \frac{EZ+\Gamma\Lambda}{2}\right),$$

$$\mathbf{O}\left(A\Gamma, \frac{\Gamma\Lambda + AH}{2}\right)$$

[36]) Zie pag. 187, 11e jg.

waaruit volgt, dat **E** (I_n) gelijk is aan een cirkel met straalvierkant

$$\mathbf{O}\,(\Theta E, EZ + \Gamma\Lambda + \tfrac{1}{2}AH).$$

Nu is wegens Prop. 22

$$(EZ + \Gamma\Lambda + \tfrac{1}{2}AH, \Theta K) = (NE, \Theta E)$$

zoodat

$$\mathbf{O}\,(\Theta E, EZ + \Gamma\Lambda + \tfrac{1}{2}AH) = \mathbf{O}\,(\Theta K, NE)$$

Verder is

$$\mathbf{O}\,(\Theta K, NE) < \mathbf{O}\,(\Theta K, \Theta N) = \mathbf{T}\,(\Theta A)$$

zoodat de oppervlakte **E** (I_n) kleiner blijkt te zijn dan de cirkel met straal $A\Theta$. Dit resultaat wordt bereikt in Prop. 37. Den cirkel met straal $A\Theta$ zullen we verder voorstellen door **K**. Prop. 37 correspondeert blijkbaar met Prop. 25. Het is nu weer de bedoeling, de oppervlakte **E** van het segment tusschen dezelfde grenzen in te sluiten als de cirkel **K**, waaraan zij gelijk zal blijken te zijn. Daartoe wordt vooreerst in Prop. 36 op grond van het vierde postulaat ingezien, dat de oppervlakte **E** (I_n) ook kleiner is dan de oppervlakte **E** van het bolsegment. Nu moeten **K** en **E** beide vergeleken worden met de oppervlakte **E** (C_n), die door een omgeschreven

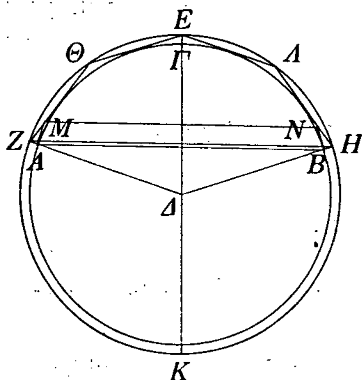


Fig. 77.

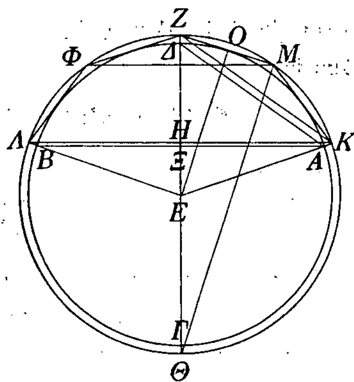


Fig. 78.

polygoonstuk bij wenteling wordt beschreven. De vergelijking van **E** (C_n) met **E** geschiedt in Prop. 39. Men beschouwt hierin (Fig. 77) het polygoonstuk $Z\Theta$ . . . . H, waarvan de hoekpunten op den grootsten der twee concentrische cirkels Δ liggen, terwijl de zijden aan den kleinsten raken. AM en BN raken aan den kleinsten cirkel

opv. in A en B. Wegens het vierde postulaat is de oppervlakte, beschreven door $AM\Theta E \ldots\ldots\ldots NB$, grooter dan de oppervlakte **E** van het segment, dat door wenteling van boog $A\Gamma B$ ontstaat. A fortiori is dus de door $ZM \ldots E \ldots NH$ beschreven oppervlakte grooter dan **E**. Immers vergelijken we de dóor ZM en AM doorloopen kegelvormige oppervlakken, dan zijn deze opv. gelijk aan twee cirkels, waarvan de straalvierkanten resp. zijn

$$\mathbf{O}\left(ZM, \frac{ZH + MN}{2}\right) \text{ en } \mathbf{O}\left(AM, \frac{AB + MN}{2}\right).$$

Daar nu $ZM > AM$ en $ZH > AB$, is de eerste oppervlakte grooter dan de tweede.

In Prop. 40 (Fig. 78) wordt nu $\mathbf{E}(C_n)$ met **K** vergeleken. Het wentelend polygoonstuk is hier $\Lambda\Phi ZMK$, de oppervlakte van het beschreven omwentelingslichaam dus gelijk aan een cirkel, waarvan het straalvierkant gelijk is aan

$$\mathbf{O}\ (ZM, M\Phi + \tfrac{1}{2}\, K\Lambda)$$

dus volgens Prop. 22 gelijk aan

$$\mathbf{O}\ (M\Theta,\ ZH)$$

Nu is $M\Theta = 2\,EO = \Delta\Gamma$ en $ZH > \Delta\Xi$ (wegens de gelijkvormigheid der driehoeken ZKH en $\Delta A\Xi$ in verband met $ZK > \Delta A$). Dus is

$$\mathbf{O}\ (M\Theta, ZH) > \mathbf{O}\ (\Delta\Gamma,\ \Delta\Xi) = \mathbf{T}\ (A\Delta)$$

Dus is

$$\mathbf{E}(C_n) > \mathbf{K}.$$

Voor het bewijs van de stelling over de oppervlakte van het bolsegment is nu nog slechts een propositie noodig, waarin bewezen wordt, dat de oppervlakten $\mathbf{E}(C_n)$ en $\mathbf{E}(I_n)$ in de dubbelreden van die van de zijden der wentelende polygoonstukken C_n en I_n staan. Dit geschiedt in het eerste deel van Prop. 41, die volkomen analoog is aan de Prop. 32, waarin het overeenkomstige resultaat voor de redeneering, die tot de oppervlakte van den bol voerde, werd bereikt.

Hierdoor is nu het bewijs van de hoofdstelling voldoende voorbereid. Zij wordt uitgesproken in

Propositie 42.

Van elk bolsegment, dat kleiner is dan een halve bol, is de oppervlakte gelijk aan een cirkel, waarvan de straal gelijk is aan de rechte, uit den top van het segment getrokken naar den omtrek van den cirkel, die basis van het bolsegment is.

De juistheid van deze bewering wordt op grond van een dubbele reductio ad absurdum (III; 8,21) uit de twee verkregen betrekkingen

$$\mathbf{E}(I_n) < \mathbf{E} < \mathbf{E}(C_n)$$

en

$$\mathbf{E}(I_n) < \mathbf{K} < \mathbf{E}(C_n)$$

op woordelijk dezelfde wijze afgeleid, als dat in Prop. 33 voor de oppervlakte van den bol geschiedde.

De beperking, dat het segment kleiner moet zijn dan een halve bol, zou voor onze opvattingen overbodig zijn. Dat Archimedes haar maakt, is waarschijnlijk als volgt te begrijpen. De geheele redeneering steunt op de stellingen over de oppervlakten van kegelvormige lichamen, die in het eerste deel van Boek I zijn afgeleid; wanneer nu een cirkelsegment wordt beschouwd, dat grooter is dan een halve cirkel, zou het kunnen voorkomen, dat een der zijden van I_n en van C_n parallel was aan de wentelingsas en dus bij wenteling een cylindrisch oppervlak beschreef, dat volgens Grieksche zienswijze niet als kegelvormig te behandelen is. Bij de afleiding van de analoge eigenschap bij den bol kon dat niet voorkomen.

Dat de stelling echter ook geldt voor een bolsegment, dat grooter is dan een halve bol, wordt in Prop. 43 zonder moeite ingezien, door de oppervlakte van zulk een segment te beschouwen als het verschil van de oppervlakten van den geheelen bol en van het complementaire segment.

Fig. 79.

De redeneering, die tot den inhoud van den bolsector voert, is als volgt samen te vatten (fig. 79):

In Prop. 38 wordt de inhoud $\mathbf{S}$ (I_n) beschouwd van het omwentelingslichaam, dat door wenteling van de figuur $EAZHB\Theta\Delta\Gamma E$ wordt voort-

gebracht en dat uit een stereo-rhombos en verder uit rhombosresten bestaat. Door toepassing van de proposities 18 en 20 vindt men, dat **S** (I_n) gelijk is aan den inhoud van den kegel, die een basis heeft, gelijk aan **E**(I_n) en een hoogte gelijk aan het apothema van het polygoonstuk $AZ \ldots \Gamma$. In een Porisma wordt nu opgemerkt, dat de inhoud van dezen kegel kleiner is dan die van een kegel **X**, waarvan de basis gelijk is aan een cirkel met straal AB en de hoogte aan den bolstraal. Immers wegens Prop. 37 is **E** (I_n) kleiner dan die cirkel, terwijl het apothema kleiner is dan de bolstraal. Hieruit volgt:

$$\mathbf{S}\ (I_n) < \mathbf{X}.$$

Op dezelfde wijze wordt een eigenschap van **S** (C_n) in de Porismata van Prop. 40 afgeleid. **S** (C_n) blijkt gelijk te zijn aan een kegel, waarvan de basis gelijk is aan **E** (C_n) en de hoogte aan den bolstraal, waaruit volgt

$$\mathbf{S}\ (C_n) > \mathbf{X}.$$

omdat wegens Prop. 41 **E** (C_n) grooter is dan de basis van **X**. We bezitten nu dus de ongelijkheden

$$\mathbf{S}\ (I_n) < \mathbf{X} < \mathbf{S}\ (C_n) \qquad (\alpha)$$

waaraan in het bewijs van de hoofdstelling zonder uitdrukkelijke vermelding wordt toegevoegd

$$\mathbf{S}\ (I_n) < \mathbf{S} < \mathbf{S}\ (C_n) \qquad (\beta)$$

waarin **S** den inhoud van den bolsector voorstelt.

Bovendien wordt in Prop. 41 nog afgeleid, dat de reden van **S** (I_n) *en* **S** (C_n) de tripelreden is van de reden van de zijden van I_n en C_n. (γ)

De hoofdstelling wordt nu uitgesproken in

Propositie 44.

Aan elken bolsector is een kegel gelijk, die een basis heeft, gelijk aan de oppervlakte van het bolsegment, dat tot den sector hoort en een hoogte, gelijk aan den straal van den bol.

De afleiding van deze stelling uit de twee ongelijkheden (α) en (β) in verband met de stelling (γ) verloopt geheel analoog aan de overeenkomstige redeneering in Prop. 34.

Consequent blijvende, had Archimedes ook hier eigenlijk de stelling eerst alleen moeten uitspreken voor een bolsector, die kleiner is dan een halve bol.

Voor onze tegenwoordige opvattingen kan het overbodig schijnen, dat een afzonderlijk bewijs wordt gegeven voor de oppervlakte en den inhoud van den bol, wanneer toch ook de oppervlakte van het bolsegment en de inhoud van den bolsector worden afgeleid. Zooals boven reeds werd opgemerkt, strookt het echter niet met de Grieksche opvatting, om een boloppervlak als bijzonder geval van het oppervlak van een bolsegment te beschouwen of zijn inhoud uit dien van den bolsector af te leiden.

KORREL.

XIII. Proeven van wiskundige exactheid, ontleend aan: „De Rekenkundige Denkbaarheden in Logischen Samenhang met — als proeve van toegepaste logica — een rekenmethode voor de lagere school" door P. J. BOUMAN en J. C. VAN ZELM, tweede druk, Amsterdam 1922.

„Wie teller denkt, denkt de ontkenning en tegenstelling van den noemer. De teller, die ontkenning is van den noemer, wordt niettemin genóémd en de noemer, die geen teller wil zijn, is niettemin uitkomst van telbaarheid, 't geen wil zeggen, dat het noemen het tellen en het tellen het noemen uiteraard en van zelf medebrengt."

„Verhouding is de denkbaarheid, waarop het in telbaarheid en berekenbaarheid uitloopt. Verhouding is een naam voor het onberekenbare Eene, wijl het een alomvattende denkbaarheid is. Want wie zegt, dat alles verhouding is of zich in verhouding laat denken, geeft daarmee te kennen, dat niets onvoorwaardelijk stand houdt. In het onberekenbare Eene verhoudt zich alles."

„In de machtsverheffing denkt men het getal als wortel van zijn macht, en is de macht, als uitkomst der machtsverheffing, getal. Is nu de wortel van een willekeurig getal steeds een getal? Inzooverre „een" getal zich verheft tot macht, is de wortel der macht getal. En inzooverre „een" getal geen uitkomst is eener machtsverheffing, is de wortel van dat getal géén getal. Het denken komt zoo tot de gedachte van getallen, die geen getallen zijn, de z.g. onmeetbare getallen (b.v. $\sqrt{3}$)."

Wie van de lezers van Euclides ziet kans, in het bovenstaande een redelijke, wiskundige betekenis te ontdekken? Welke denkbeelden moet de lectuur van een dergelijk boek bij den argelozen lezer verwekken! In het licht van dergelijke „voorlichting" worden de hardnekkige en verspreide misverstanden ten aanzien van karakter en betekenis van het wiskundig denken wellicht enigszins begrijpelijk.

E. W. Beth.

1 ½ cts.
postzegel

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

POSTBUS 39

GRONINGEN.

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post Giro No. 6593

Ondergetekende, abonné op { Compositio Mathematica
Nieuw Archief voor Wiskunde
„Christiaan Huygens"
„N. T. voor Wiskunde"
„Euclides" }

verzoekt toezending van 1 exemplaar: *)

De Vries, Inleiding tot de studie der meetkunde v/h aantal

geb. in heel linnen à f 4.90 (gewone prijs is f 5.75)
ingenaaid . . . à f 3.90 („ „ „ - 4.75)

door bemiddeling van de boekhandel

direct per post,

....

Naam: Woonplaats:

....

*) S.v.p. door te halen wat niet wordt verlangd
Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex., mits besteld vóór 1 Febr. 1937; voor Indië vóór 1 April 1937.

DE ONTWIKKELING VAN DE INTUITIONISTISCHE WISKUNDE [1])

DOOR

Dr. A. HEYTING.

Wie zich voor het eerst in de intuitionistische wiskunde verdiept, zal in het begin vooral de uiterst kritische houding opmerken, die de intuitionisten tegenover de klassieke wiskunde aannemen. De voornaamste grief, die zij tegen de gangbare wiskunde hebben, bestaat hierin, dat deze aan de wiskundige individuen als natuurlijke getallen of reële getallen een zeker bestaan onafhankelijk van ons denken toekent, en daarvan ook in de bewijzen gebruik maakt.

Het eenvoudigste voorbeeld hiervan, dat ik ooit aantrof, ontleen ik aan de inleiding van een bekend werk over getallentheorie. Daar wordt, voordat van ontbinding in factoren of van priemgetallen sprake is geweest, de GGD van twee gehele getallen a en b als volgt gedefinieerd. Men vormt alle getallen $pa + qb$ met gehele coefficienten p en q; het kleinste positieve getal, dat zo gevormd kan worden, is de GGD. Is hierdoor nu werkelijk een bepaald natuurlijk getal als GGD aangewezen? Toch alleen, mits wij aannemen, dat in de verzameling van alle getallen, die in de vorm $pa + qb$ geschreven kunnen worden, een kleinste „bestaat" onafhankelijk van de vraag, of wij het uit kunnen rekenen. Voor dit laatste staat ons op de plaats, waar deze definitie gegeven wordt, geen enkel middel ten dienste. Van intuitionistisch standpunt is dus in het geheel geen definitie van een GGD gegeven; wij hebben die pas, als wij een middel aangeven, de GGD werkelijk uit te rekenen. Natuurlijk is in dit geval de zaak gemakkelijk in orde te maken, al is het maar, door van een meer gebruikelijke definitie van de GGD uit te gaan en te bewijzen, dat de zo

---

[1]) Openbare les, gegeven bij de aanvaarding van de functie van privaat-docent aan de Universiteit van Amsterdam, op 30 November 1936.

verkregen GGD de genoemde eigenschap heeft. Een dergelijke aanvulling wordt reeds veel lastiger bij zeer eenvoudige redeneringen over reële getallen.

Volgens de klassieke opvatting spreekt het vanzelf, dat, wanneer een niet negatief reëel getal a gegeven is, steeds één van de beide volgende eigenschappen juist is: hetzij $a = 0$, of er bestaat een natuurlijk getal n, zodat $a > \frac{1}{n}$. Om de intuitionistische kritiek op deze bewering te begrijpen, moeten wij ons even herinneren, wat een reëel getal eigenlijk is. Wij kunnen het ons het eenvoudigst voorstellen (ook al is dit niet de algemeenste definitie) als een decimale breuk, waarvan wij volgens een bepaald voorschrift zoveel decimalen kunnen uitrekenen als wij willen. Wanneer een reëel getal gedefinieerd wordt, geeft men steeds een dergelijk voorschrift, zij het soms indirect. Definieert men bijv. π als de verhouding tussen de omtrek van een cirkel en zijn middellijn, dan is daarmede tevens aangegeven, dat men π willekeurig dicht kan benaderen, door de cirkel te vervangen door een ingeschreven regelmatige veelhoek met een voldoende groot aantal zijden; men is dus ook in staat, van de decimale ontwikkeling van π zoveel cijfers te berekenen als men wil.

Het is gemakkelijk, het voorschrift voor de berekening van de decimalen van een reëel getal a zo in te richten, dat wij niet kunnen uitmaken, om $a = 0$ of niet. Men kan uitgaan van de decimale ontwikkeling

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ldots\ldots,$$

en daaronder schrijven

$$\varrho = 0{,}00000\ 00000\ldots\ldots,$$

waarbij het voorschrift voor de berekening van ϱ aldus luidt: Schrijf altijd een 0, behalve wanneer in π drie of meer achtereenvolgende zevens optreden; schrijf dan onder de derde zeven een 1. Onder de 400 decimalen, die ijverige rekenaars van π berekend hebben (het staat niet vast, dat zij allemaal juist zijn), komen geen drie opeenvolgende zevens voor; niemand weet dus, of $\varrho = 0$ of niet, en men is zeker niet in staat, het natuurlijke getal n zo te bepalen, dat $\varrho > \frac{1}{n}$. De klassieke opvatting, dat de drie zevens óf niet in π voorkomen, óf ergens op een bepaalde plaats, na een eindig aantal decimalen voorkomen, zodat in het tweede

geval het getal *n* toch bestaat, al weten wij niet hoe groot het is, deze opvatting berust duidelijk op de voorstelling van een of andere vorm van „bestaan" van de decimalen van π, en zelfs van de oneindige rij decimalen als geheel, onafhankelijk van ons denken. Nu kan men tegenwerpen, dat het er niet veel toe doet, of men het zoëven genoemde alternatief over ϱ aanvaardt of niet; men heeft practisch toch niets aan dat alternatief, als men niet uit kan maken, welk geval men voor zich heeft. Dan vergeet men echter, dat de wiskunde op dat alternatief verder bouwt, en dergelijke alternatieven ten slotte zo dooreenweeft, dat het niet gemakkelijk meer uit te maken valt, wat nu eigenlijk de intuitionistische zin van de uitgesproken stellingen is. Zijn a en b reële getallen, dan kan men volgens de klassieke wiskunde altijd twee reële getallen x en y, die niet beide 0 zijn, vinden, zodat $ax = by$. Zijn namelijk a en b niet beide 0, dan neemt men $x = b$, $y = a$; zijn a en b wel beide 0, dan kan men voor x en y nemen wat men wil, mits niet $a = b = 0$. In het eerste geval is $x = kb$, $y = ka$ $(k \neq 0)$ de enige oplossing; in het tweede is dit juist de enige oplossing die men niet kan gebruiken. Zijn nu a en b getallen, waarvan men niet weet, of zij gelijk aan 0 zijn of niet, dan kunnen wij geen oplossing voor x en y aangeven. De klassieke wiskunde neemt nu niet alleen aan, dat die oplossing toch ergens „bestaat", maar substitueert ze ook in andere vergelijkingen, enz., tot ten slotte het ontwarren van de knoop zo lastig geworden is, dat het verstandiger is, hem maar door te hakken en de stelling met het bewijs geheel te verwerpen.

Wij kunnen deze kritische opmerking zo samenvatten, dat wiskundige bewijzen onafhankelijk behoren te zijn van philosophische opvattingen omtrent het bestaan van de wiskundige individuen. Het is begrijpelijk, dat men, na van deze kritiek kennis genomen te hebben, dikwijls de vraag stelt: „Maar wat blijft er dan van de klassieke wiskunde over?" Toch is die vraag geheel onjuist geformuleerd. Er spreekt immers duidelijk de voorstelling uit, dat men slechts de Encyclopaedie der Mathematische Wetenschappen bladzijde voor bladzijde zou behoeven door te werken en alles tusschen haakjes te zetten wat de toets der kritiek niet kan doorstaan, om een Encyclopaedie der Intuitionistische Wiskunde over te houden. Zo eenvoudig is het nu niet; komt het eenmaal zover, dat een Encyclopaedie der Intuitionistische Wiskunde

kan verschijnen, dan zal men niet met haakjes kunnen volstaan, maar de meeste hoofdstukken geheel nieuw moeten schrijven, ja zelfs hoofdstukken moeten invoegen, die niet met een hoofdstuk van de klassieke wiskunde overeenkomen. Het intuitionisme blijft niet staan bij de kritiek, die ik zoeven aangeduid heb, maar vult deze aan door het inzicht, wat een wiskundige redenering dan wel behoort te zijn, namelijk een constructie, in gedachten uitgevoerd, uitgaande van enkele begrippen, die bij intuitie duidelijk zijn, omdat zij tot het materiaal behoren, dat in onze geest steeds voor gebruik gereed ligt; het belangrijkste van deze grondbegrippen is dat van het natuurlijke getal. De intuitionistische wiskundige gaat dus niet alleen afbrekend, maar ook opbouwend te werk, in de overtuiging, dat hetgeen hij opbouwt beter gefundeerd zal zijn dan wat hij afbreekt. Er zijn in hoofdzaak twee wegen, waarlangs het intuitionisme tot dusver vanzelf tot de vorming van nieuwe begrippen heeft geleid. De eerste bestaat in de vervanging van negatieve begrippen door positieve. Laat ik door een eenvoudig voorbeeld toelichten, wat hiermede bedoeld wordt. π is een onmeetbaar getal, d.w.z. het kan niet in de vorm van een breuk $\frac{a}{b}$ met gehele teller en noemer geschreven worden. Deze stelling is reeds lang bekend, maar het bewijs was zuiver negatief, d.w.z. het ging zo te werk, dat uit de onderstelling $\pi = \frac{a}{b}$ een ongerijmdheid werd afgeleid. Eerst in 1920 heeft Prof. Brouwer een methode aangegeven, om bij iedere breuk $\frac{a}{b}$ een natuurlijk getal n aan te geven, zodat $\left| \pi - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{n}$. Dat dit zo lang geduurd heeft, lag in dit geval niet aan de buitengewone moeilijkheid van het probleem; wanneer men er ernstig naar gezocht had, zou men het wel eerder opgelost hebben. Men vond het echter niet nodig, omdat men na het negatieve bewijs overtuigd was, dat een dergelijk getal n bestond, en het enigszins beneden zijn waardigheid achtte, het werkelijk uit te rekenen. Tegenwoordig staan de getallentheoretici tegenover analoge problemen wel anders, en zal men in een dergelijk geval wel belangstelling hebben voor de berekening van n in concrete voorbeelden. Principieel blijven de meesten echter op het standpunt staan, dat bijv. de volgende redenering

ook op grond van het negatieve irrationaliteitsbewijs van π legitiem zou zijn; „Laat $\frac{a}{b}$ een willekeurige breuk zijn; stel $| \pi - \frac{a}{b} | = \delta$; δ is niet 0, dus $\frac{1}{\delta}$ is een reëel getal, waarmee wij verder rekenen kunnen". Hier kan de intuitionist de redenering niet meer volgen, want wij kunnen met de berekening van $\frac{1}{\delta}$ eerst beginnen, als wij een bovenste grens voor dit getal kennen, dus als wij het getal n, waarover ik zoëven sprak, kunnen berekenen. Aan de klassieke opvatting ligt blijkbaar min of meer bewust deze overweging ten grondslag: Het geval kan zich misschien voordoen, dat wij bij een bepaalde keuze van $\frac{a}{b}$ het getal n niet berekenen kunnen, maar dan ligt dit uitsluitend aan de onvolkomenheid van onze vermogens, want δ kan nu eenmaal niet nul zijn, dus n moet bestaan, al weten wij niet hoe groot het is. Ik heb al betoogd, waarom wij een dergelijke overweging niet kunnen laten gelden; deze kritiek voert hier nu tot een scherpe onderscheiding tussen de zuiver negatieve uitspraak: „δ is niet gelijk aan 0" en de positieve: „Men kan een natuurlijk getal n berekenen, zodat $| \delta | < \frac{1}{n}$". Dit laatste zullen wij korter uitdrukken door te zeggen, dat δ *„aanwijsbaar* van 0 verschilt".

Men kan, zoals uit dit voorbeeld blijkt, de positieve wending van negatieve begrippen ook opvatten als een splitsing van de theorie: naast de negatieve en parallel daarmee wordt een positieve theorie opgebouwd, die meestal belangrijker en interessanter is. Dit komt bijzonder duidelijk uit op het gebied van de oneindige reeksen. Volgens de klassieke wiskunde is een reeks met positieve termen zeker convergent, wanneer zij begrensd is, d.w.z. wanneer de som s_n van n termen, hoe groot n ook is, kleiner blijft dan een zeker getal M. Men redeneert namelijk ongeveer zo: onder de getallen, die kleiner zijn dan M, kunnen er voorkomen, die evenals M de eigenschap bezitten, dat zij groter zijn dan s_n voor iedere waarde van n; laten wij deze getallen en ook M zelf van de eerste soort noemen, en de overige getallen < M van de tweede soort. Ieder getal van de tweede soort is kleiner dan ieder getal van de eerste soort; er is dus ergens een grens tussen de getallen van de

eerste en die van de tweede soort; ligt die grens bij het getal a, dan is a het kleinste getal van de eerste soort; ieder getal, dat kleiner dan a is, hoe weinig ook, behoort tot de tweede soort, dus bij ieder positief getal δ kan men n zo bepalen, dat $s_n > a - \delta$. a is dus de limiet van s_n voor onbepaald aangroeiende n; wij drukken dit uit door te zeggen, dat de reeks convergeert met de som a. Wij kunnen echter de reeks gemakkelijk zo definieren, dat wij niet in staat zijn, a te berekenen. Laat bijv. $t_n = 2^{-n}$ zijn voor iedere n, behalve als de n^edecimaal uit π de laatste is van het eerste drietal opeenvolgende zevens in n; dan is $t_n = 1 + 2^{-n}$. Hier is $s_n < 2$; komen in π geen drie opeenvolgende zevens voor, dan is $a = 1$, maar komen die er wel in voor, dan is $a = 2$. Wij kunnen a dus niet berekenen. Indien a al „bestaat", dan zeker toch niet in de zin, die dit woord in de intuitionistische wiskunde heeft. Noemen wij een reeks convergent, wanneer wij haar som kunnen berekenen, dan is de zoëven gedefineerde reeks begrensd, maar niet convergent. Ook het begrip convergentie kunnen wij echter nog op twee manieren definieren. Wij kunnen eisen, dat wij bij iedere δ de index n kunnen berekenen, zodat $s_n > a - \delta$, en definieren zo de positieve convergentie van de reeks; wij kunnen ook tevreden zijn met de zekerheid, dat onmogelijk voor iedere n kan gelden $s_n < a - \delta$; deze eigenschap definieert de negatieve convergentie van de reeks. Nadat Prof. Brouwer deze convergentiebegrippen had aangegeven, heeft de Heer Belinfante de theorie der oneindige reeksen verder uitgewerkt. Er ontstaat een positieve theorie, geheel op de positieve convergentiedefinitie berustend, en waarin ook de verdere begrippen positief worden gedefinieerd, en parallel daarmee een negatieve theorie. Deze onderzoekingen zijn bijzonder geschikt, de ontoereikendheid van de „haakjesmethode" te demonstreren.

Als tweede voorbeeld van een dergelijke splitsing van een theorie kies ik de intuitionistische ordeningstheorie. Men zegt van twee reëele getallen a en b, dat $a \;_0\!> b$ (a is aanwijsbaar groter dan b) als een natuurlijk getal n bekend is, zodat $a - b > \frac{1}{n}$; het geheel van deze relaties vormt de „pseudo-ordening" van het continuum. Van Prof. Brouwer is de definitie van een „virtuele ordening" afkomstig; hij zegt, dat $a > b$, als zowel $a = b$ als $a <_0 b$ ongerijmd is. Men kan zowel de pseudo-ordening als de

virtuele ordening in het algemeen voor willekeurige soorten axiomatisch definieren; voor de laatste heeft Prof. Brouwer dit ook gedaan. Zo verkrijgt men twee theorieën, waarvan men die van de pseudo-ordening de positieve, de andere de negatieve zou kunnen noemen. Het blijkt, dat men uit een pseudo-ordening steeds een virtuele ordening kan afleiden, maar niet omgekeerd; er zijn soorten, zoals die van alle polynomen in een veranderlijke met reële coefficienten, die men virtueel kan ordenen, zonder dat die virtuele ordening uit een pseudo-ordening afgeleid kan worden. In dit opzicht is dus hier de negatieve theorie belangrijker dan de positieve.

Om aan een bepaalde stelling de positieve en de negatieve vorm te laten zien, neem ik aan, dat wij met een groep te maken hebben, waarin hetzij een pseudo-ordening, hetzij een virtuele ordening gedefinieerd is, die tegenover de groepoperatie invariant is. Van twee elementen a en b is dus de som $a + b$ bepaald, evenals na, wanneer n een natuurlijk getal is. Nu luidt het zgn. axioma van Archimedes in zijn positieve vorm:

Als $a \;{}_{\circ}\!\!> 0$, bestaat er voor iedere b een natuurlijk getal n, zodat $na \;{}_{\circ}\!\!> b$.

De negatieve vorm is:

Als voor ieder natuurlijk getal n geldt $na < b$, dan is $a > 0$ onjuist.

Voor het continuum gelden de beide stellingen, de eerste voor de pseudo-ordening, de tweede voor de virtuele ordening. Het is duidelijk, dat zij geheel verschillende inhoud hebben.

Ik vermeld nog, dat de stelling van Hölder: „Iedere geordende groep, waarin het axioma van Archimedes geldt, is commutatief", ook doorgaat, wanneer men het axioma in zijn negatieve vorm aanneemt.

Behalve de positieve interpretatie van negatieve begrippen is er een tweede weg, waarlangs de intuitionistische wiskunde aan de klassieke iets nieuws heeft toegevoegd, namelijk de theorie van de keuzenreeksen. Voor de klassieke richting is dit begrip in de wiskunde volstrekt onaanvaardbaar. Een reëel getal bijv., dat wij immers door een onbepaald voort te zetten rij van meetbare getallen bepaald kunnen denken, bestaat volgens deze opvatting onafhankelijk van de vraag, of wij die meetbare getallen werkelijk berekenen kunnen; het heeft dus geen zin, dat reële getal als door

de successieve berekening van die meetbare getallen langzamerhand ontstaand te denken. Als tweede bezwaar voelt men het volgende. Bepaalt men een reëel getal, door de meetbare benaderingswaarden achtereenvolgens te kiezen, dan wordt de wiskunde van menselijke willekeur, of zelfs van het toeval afhankelijk gemaakt. Nu, zolang men telkens slechts één of een eindig aantal reële getallen in het oog vat, is er ook intuitionistisch weinig aanleiding, keuzenreeksen in te voeren. Het wordt anders, zodra men stellingen beschouwt, die voor ieder reëel getal gelden. Hiertoe behoren reeds alle formules uit de algebra, zoals $(x + 1)(x - 1) = x^2 - 1$. Dat een dergelijke formule voor ieder reëel getal x geldt, betekent niets anders dan het volgende: benadert men x tot een zeker aantal p decimalen nauwkeurig, dan kan men zowel het linker- als het rechterlid tot een zeker, op eenvoudige wijze van p afhangend, aantal decimalen benaderen; deze benaderde waarden zullen steeds overeenstemmen, hoe groot men p ook neemt. In deze definitie (ook in haar nauwkeuriger formulering) komt niets voor over de wet, waardoor de decimalen van x achtereenvolgens berekend worden, en ook bij het bewijs heeft men dit begrip niet nodig. Het begrip „wet" is dus voor deze stelling nutteloze ballast; wij kunnen er veel beter niet over spreken, en geheel in het midden laten, op welke wijze de decimalen van x achtereenvolgens worden bepaald, hetzij volgens een bepaalde regel, hetzij door ze willekeurig te kiezen, door gooien met een dobbelsteen, of op nog andere wijze. Het is dus niet zozeer de bedoeling, het spel van het toeval of de grillen van een mens aan de wiskunde ten grondslag te leggen, als wel, het begrip „wet" uit te schakelen uit die redeneringen, waarin het zonder schade gemist kan worden.

In dit voorbeeld was dat begrip alleen maar nutteloze ballast, die ons weinig hinderde, omdat wij hem eenvoudig konden negeren; het staat ons echter zeer hinderlijk in de weg bij alle vragen waarin de verzameling van alle reële getallen, dus het continuum, optreedt. Wordt elk reëel getal door een wet bepaald, dan is het continuum niets anders dan de verzameling van alle wetten. Deze verzameling nu is bij uitstek onoverzichtelijk; wie kan zeggen, wat voor zonderlinge wetten men nog zal uitdenken om reële getallen te definieren. Ook voor een jurist zal de verzameling van alle wetten, die ooit uitgevaardigd zijn, uitgevaardigd

PROSPECTUS.

INLEIDING TOT DE STUDIE DER MEETKUNDE VAN HET AANTAL

DOOR

DR. HK. DE VRIES

HOOGLEERAAR AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



Prijs van het complete werk, groot 320 pag., f 4.75, geb. f 5.75.

Voor abonné's op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften tot 1 Febr. '37 à f 3.90, geb. à f 4.90.

P. NOORDHOFF N.V. — 1936 — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar in de boekhandel en bij N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF, Laan Holle 7, Batavia C.

VOORREDE.

Ik heb dit boek geschreven om verschillende redenen, waarvan de voornaamste is, dat een rijke ervaring als academisch docent mij geleerd heeft, dat er geen voortreffelijker middel bestaat om Meetkunde te leeren dan de studie der Meetkunde van het aantal, met als instrument van onderzoek den „Kalkül" van SCHUBERT. Men kan de Meetkunde van het aantal ook zeer wel bestudeeren zònder dien „Kalkül", zooals H. G. ZEUTHEN in zijn beroemd „Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie", Leipzig, Teubner, 1914, op overtuigende wijze heeft aangetoond, maar het is juist de inderdaad magische kracht van den „Kalkül" die de studeerende jeugd zoo in vervoering brengt; en zoo is het volstrekt geen wonder, dat de begaafdsten onder mijn oud-leerlingen, waaronder er zijn wier namen tegenwoordig klinken als klokken, hun zelfstandigen wetenschappelijken arbeid begonnen zijn op mijn college over den „Kalkül", zoodat die „Kalkül" als het ware het nest geweest is, van waar zij zijn uitgevlogen om hun positie in de wetenschappelijke wereld te gaan veroveren; en daarbij zijn het niet alleen de schoonheden en volmaaktheden die hen hebben geïnspireerd, en ook mijn tegenwoordige leerlingen weer bezielen, neen, zelfs de tekortkomingen, of misschien juist deze (want ook de „Kalkül" is menschenwerk, en dus niet volmaakt) hebben hen geprikkeld tot eigen krachtsinspanning en ontplooiing van hun talenten, om de voldoening te genieten de onvolkomenheden weg te werken; en zoo is dat college over den „Kalkül" voor allen, en niet het minst voor den docent, geworden tot een bron van het zuiverste genot, en zal het wel moeilijk zijn uit te maken wie bij dat college het meest geprofiteerd hebben, de toehoorders, of de docent.

De „Kalkül" van SCHUBERT is een methode van onderzoek gebleken van de allerhoogste paedagogische waarde, en wanneer men vraagt hoe het dan komt dat het boek van SCHUBERT zelf („Kalkül der abzählenden Geometrie", Leipzig, Teubner, 1879) zoo weinig opgang gemaakt heeft, dan luidt het antwoord kort en bondig, omdat het als leerboek niet deugt; omdat het losjes aaneenrijgen van verhandelingen, die verschenen zijn in mathematische tijdschriften, en geschreven zijn voor vakmannen, niet de manier is om een goed leerboek saam te stellen; omdat het een verkeerde paedagogiek is den lezer onder een alp van resultaten plat te drukken (een specifiek Germaansche hebbelijkheid), en omdat heel dikwijls een geniaal man juist niet degene is, die zijn eigen

schepping voor minder geniale lezers dan hij zelf is „mundgerecht" weet te maken.

Waarop berust dan eigenlijk die meesleepende kracht van den „Kalkül"? Op het samenwerken van verschillende factoren. Ten eerste op het feit, dat van den „Kalkül" volmaakt hetzelfde geldt wat Jacob Steiner in zijn hoog gestemde „Vorrede" voor zijn „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander" (Werke I, p. 233) in 1832 reeds van de Projectieve Meetkunde gezegd heeft, nl.: „Es giebt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Theile naturgemäss in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen, und verwandte zu wohlbegrenzten Gruppen sich vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise den Figuren unzählig viele Eigenschaften beilegen zu können." Deze „wenige Fundamentalbeziehungen" zijn bij Steiner de projectieve en perspectieve rechten en waaiers, bij Schubert de Incidentie- en de eenvoudigste Coïncidentieformules; maar wat in de Projectieve Meetkunde toch feitelijk slechts geldt voor de kegelsneden en de kwadratische oppervlakken, dus voor het geval $n = 2$, geldt in den „Kalkül" gansch algemeen, en het ligt nu eenmaal in den aard van den mathematicus om in vuur te geraken wanneer hij ziet hoe hij op enkele doodeenvoudige „Fundamentalbeziehungen", die hij zich bovendien nog spelenderwijze „gehörig aneignet", een heele wetenschap vermag op te bouwen.

In de tweede plaats ligt er iets buitengewoon verrassends en fascineerends in de ontdekking dat men in de Analytische Meetkunde, die toch de figuren door vergelijkingen bepaalt, in tallooze gevallen die vergelijkingen zelve niet eens noodig heeft, maar geholpen is zoodra men hun graad kent, en het is bepaald geniaal om voor het rekenen met die graadgetallen alléén een algorithmus, dus een rekenwijze, te bedenken die het mogelijk maakt om, uitgaande van laat ons zeggen een rechtstreeks afgeleide grondformule van de dimensie 1, door toepassing van de allersimpelste bewerking ter wereld, nl. de vermenigvuldiging, zonder een schijn van inspanning op te klimmen tot de formules van de dimensies 2, 3, enz., dus bijv. van de regeloppervlakken tot de

stralencongruenties en -complexen, zoodat men, uitgaande van een formule die een eigenschap der congruenties aanwijst bijv., door èèn vermenigvuldiging, met èèn enkel lettertje, een stelling voor de complexen afleidt en bewijst, en wel nog vóórdat men zèlf weet welke stelling dat nu eigenlijk is.

De „ganz einfache Fundamentalbeziehungen" worden, althans wat de Incidentieformules betreft, afgeleid door toepassing van het zoogenaamde „Beginsel van het behoud van het aantal", en dit is nu het punt waarop de tegenstanders van SCHUBERT — en er waren er oorspronkelijk velen — hun aanvallen gericht hebben; en tot op zekere hoogte met recht. En toch was dit beginsel geenszins nieuw, maar integendeel van oudsher stilzwijgend toegepast bij het bepalen van de graadgetallen van krommen en oppervlakken bijv.; maar het was vóór SCHUBERT steeds gebruikt als een aardig en onschuldig kunstje, nog nooit echter coram populo tot fundament van een geheel gebouw van wetenschap uitgeroepen, en dat schijnt de brave menschen geïrriteerd te hebben. En ze hadden, wat het ergste is, gelijk! Het beginsel van het behoud van het aantal kàn, laat ons liever zeggen zou, in een dood-enkel geval, tot verkeerde uitkomsten kunnen leiden, en het pleit voor de vindingrijkheid der heeren, dat ze zoo'n doodenkel geval ook werkelijk wel gevonden hebben; maar de gevallen waarin het Beginsel bij SCHUBERT inderdaad wordt toegepast, zijn zóó simpel en zóó doorzichtig, dat verkeerde uitkomsten eenvoudig uitgesloten zijn; en inderdaad is van al die duizenden aantallen, die door SCHUBERT berekend zijn, geen enkel fout, wat volkomen zeker is, omdat de meeste langs verschillende wegen, en door altijd weer nieuwe combinatie van reeds vroeger gevondene, te verkrijgen zijn, en dus de meest wanhopige verwarring zou ontstaan indien er ook maar èèn niet deugde. Niettemin hebben de heeren vastgesteld, dat de Meetkunde van SCHUBERT „niet streng" was, en dat is nog vèèl erger dan wanneer men van een lèvende vrouw zegt dat ze van verdachte zeden is. De heeren hebben over hèt doel heen geschoten; zij hebben de ontzaglijke paedagogische waarden van den „Kalkül", de meesleepende bekoring die er van uitgaat, in hunne kwaliteit van strengheidsmaniakken ten eenenmale over het hoofd gezien. Ook hebben zij de niet zeer geestige opmerking gemaakt, dat men de door SCHUBERT berekende aantallen ook wel langs anderen weg kan vinden, en ook dáárin hebben zij gelijk, hoewel slechts ten deele; want, we schrijven op het oogenblik 1936, en het boek van SCHUBERT stamt uit 1879, er zijn nog altijd bij SCHUBERT aantallen die aan alle pogingen

om ze langs anderen weg te vinden, hardnekkig weerstand geboden hebben. Maar bovendien, al was dit niet zoo, doet dan de manier waaròp een uitkomst gevonden wordt, niets ter zake? Ik dacht dat er óók nog zoo iets als wiskundige élégance bestond, en nu vergelijke men bijv. eens de uiterst ingewikkelde en omslachtige wijze waarop de beroemde formule van HALPHEN voor het aantal gemeenschappelijke stralen van twee congruenties, of de theorema's van BEZOUT, of de formules van PLÜCKER voor vlakke krommen, zònder SCHUBERT worden afgeleid, met de bijna aandoenlijk simpele wijze waarop diezelfde formules zich presenteeren als zèèr bijzondere gevallen van veel algemeenere, waaruit alle overige termen wegvallen; niet waàr, om met Molière te spreken: „Il y a fagots et fagots".

Er is meer; men kan de leer der kegelsneden en kwadrieken even fraai synthetisch als analytisch ontwikkelen; wie moet nu volgens de heeren afgemaakt worden, STEINER, of PLÜCKER? Zou het maar niet het beste zijn èn STEINER, èn PLÜCKER, èn SCHUBERT in het leven te laten? Het waren heusch alle drie héél knappe menschen. En om nog even terug te komen op het beginsel van het behoud van het aantal: vèèl krassere toepassingen van dit beginsel dan SCHUBERT zelf zich voor zijn Incidentieformules ooit gepermitteerd heeft, bijv. bij de zoogenaamde degeneraties van ZEUTHEN, geven altijd juiste uitkomsten; men kan dus gerust zijn.

Het is met den „Kalkül" van SCHUBERT net zoo gesteld als met de Differentiaalrekening; een functie is „in het algemeen" niet te differentieeren, en als ze het wèl is, dan is $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ „in het algemeen" niet gelijk aan $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; toch lijkt het mij niet onverstandig dat LEIBNIZ, NEWTON, en JOHANN BERNOUILLI destijds de Differentiaalrekening maar hebben opgesteld zooals wij haar kennen.

Het onderwijs in Meetkunde, in de Wiskunde in het algemeen heeft van oudsher hevig te lijden gehad onder sleur; wat de lagere Wiskunde aangaat, vrage men dit maar eens aan mijn vriend Wijdenes; wat de hoogere Meetkunde betreft, is het een geweldige paedagogische misgreep dat men eenvoudig overal verzuimt de studeerende jongelingschap door den „Kalkül" van SCHUBERT tot enthousiasme te brengen en tot eigen, vruchtdragenden, arbeid aan te sporen.

Amsterdam, 1936. DE SCHRIJVER.

Methode van Schaake voor het karakteristieken-probleem der kegelsnede.

§ 104. Wij beperken ons ook hier tot het platte vlak. Dan heeft de kegelsnede 5 constanten; wij denken dus een stel Σ van ∞^4, en een stel Σ' van ∞^1 kegelsneden, en projecteeren dit laatste uit C op c. Gaat dan k'^2 niet door C, dan is de projectie op c blijkbaar een degeneratie η (§ 65, p. 172), een dubbel tellende orderechte met twee enkelvoudige klassepunten; laat men echter k'^2 tot C naderen, dan ziet men de klassepunten tot elkaar naderen, en de projectie overgaan in een δ, wier ééne been met c samenvalt, terwijl het andere natuurlijk wel is waar door het dubbeltellende klassepunt gaat, maar overigens onbepaald is.

Σ bezit op c $\eta g^2 q$ degeneraties η, wier klassepunt q bepaald is; aan dit punt q zijn dus $\eta g^2 q$ punten p toegevoegd. Is nu $p \equiv p_1'$, dan wordt de lijn Cp_1' door ν' kegelsneden van het stel Σ' aangeraakt, zoodat aan dit ééne punt p ν' punten q_1' zijn toegevoegd, dus aan alle punten p $\eta g^2 q \cdot \nu'$ punten q'_1, *en dus aan één punt* q $\eta g^2 q \cdot \nu'$ *punten* q_1'.

Nu omgekeerd. De lijn die C verbindt met een punt q_1' wordt door ν' kegelsneden van Σ' aangeraakt, zoodat aan één punt q_1 ν' punten p_1' zijn toegevoegd. Is nu $p_1' \equiv p$, dan zijn aan dit punt $\eta g^2 p$ punten q toegevoegd, *dus aan één punt* q_1' $\eta g^2 p \cdot \nu'$ *punten* q; tusschen de punten q en q'_1 bestaat dus een verwantschap:

$$(\eta g^2 p \cdot \nu', \qquad \eta g^2 q \cdot \nu').$$

Maar nu is het duidelijk dat $\eta g^2 p = \eta g^2 q$, van wege de gelijkwaardigheid der punten p en q; dus is de verwantschap een

$$(\eta g^2 p \cdot \nu', \qquad \eta g^2 p \cdot \nu')$$

met 2 $\eta g^2 p \cdot \nu'$ coïncidenties; maar van wege de gelijkwaardigheid der punten p en q liggen in één gemeenschappelijke oplossing 2 coïncidenties omgekeerd op elkaar; het aantal gemeenschappelijke oplossingen bedraagt dus $\eta g^2 p \cdot \nu'$.

Σ bezit $\delta p^2 g$ degeneraties δ, wier dubbelpunt in een gegeven punt van c ligt (p^2), en wier eene been langs c valt (g); Σ' daarentegen levert slechts μ' δ's (zie boven), wier dubbelpunt op c valt, en wier ééne been eveneens op c valt, terwijl het andere onbepaald is; het hieruit voortvloeiende aantal gemeenschappelijke oplossingen is dus $\delta p^2 g \cdot \mu'$, en zoo wordt dan de karakteristiekenformule:

$$z = \delta p^2 g \cdot \mu' + \eta g^2 q \cdot \nu'.$$

Bedenken we dat uit deze formule gelezen kan worden dat iedere enkelvoudige voorwaarde, aan een stel ∞^1 kegelsneden opgelegd, lineair en homogeen is uit te drukken in μ' en ν', dan ontdekken we dat zij identisch is met de experimenteele formule:

$$x = \alpha\mu' + \beta\nu'$$

van CHASLES waaraan het karakteristiekenprobleem zijn ontstaan te danken heeft, en zien wij tevens dat in het bovenstaande het bewijs van deze formule ligt opgesloten dat CHASLES nog niet geven kon.

Wij brengen de formule van CHASLES nog op een ietwat anderen vorm, nl. met behulp van de symbolen μ en ν voor de kegelsneden van Σ. $\delta p^2 g$ beteekent zoo ongeveer hetzelfde als $\delta\nu^2\mu$; want als een δ twee lijnen moet aanraken, dan moet haar dubbelpunt in het snijpunt van die lijnen liggen. Maar iedere lijn door dat dubbelpunt telt voor 2 raaklijnen, twee tellen dus voor 4, zoodat in iedere $\delta p^2 g$ $4\delta\nu^2\mu$ vereenigd liggen, en dus:

$$\delta p^2 g = \tfrac{1}{4}\delta\nu^2\mu \text{ is, en dualistisch:}$$

$$\eta g^2 p = \tfrac{1}{4}\eta\mu^2\nu, \text{ zoodat wij vinden:}$$

$$z = \tfrac{1}{4}\delta\nu^2\mu \,.\, \mu' + \tfrac{1}{4}\eta\mu^2\nu \,.\, \nu',$$

en dit is de definitieve vorm van de formule $x = \alpha\mu' + \beta\nu'$

Geven we van deze formule een kleine toepassing. Hoeveel kegelsneden uit een stel ∞^4 raken een puntalgemeene kromme van den vierden graad k^4 in 4 punten.

Is x de enkelvoudige voorwaarde van aanraking, dan moet voldaan worden aan de voorwaarde x^4; het blijkt nu dat x^4 is uit te drukken in μ^4 en ν^4, zonder dat de tusschengelegen machten $\mu^3\nu$, $\mu^2\nu^2$ en $\mu\nu^3$ optreden; inderdaad wijst onze karakteristiekenformule uit dat het karakteristiekengetal niet slechts voor de enkelvoudige, maar ook voor de viervoudige voorwaarde 2 bedraagt; μ^4 en ν^4 moeten dus voldoende zijn.

δ en η zijn enkelvoudige voorwaarden; neem nu nog een willekeurige derde, die we γ zullen noemen, er bij; dan hebben we dus de viervoudige voorwaarden

$$x^4, \quad \mu^4, \quad \nu^4, \text{ en de enkelvoudige:}$$

$$\gamma, \quad \delta, \quad \eta,$$

en moet de determinant van SCHUH (§ 97, p. 264) nul zijn, omdat x^4 van μ^4 en ν^4, γ van δ en η afhangt. Deze determinant luidt:

$$\begin{vmatrix} x^4 y & \mu^4 y & \nu^4 y \\ x^4 \delta & \mu^4 \delta & \nu^4 \delta \\ x^4 \eta & \mu^4 \eta & \nu^4 \eta \end{vmatrix} = 0.$$

$\mu^4\delta$ is het aantal lijnenparen in een kegelsnedenbundel, en dus 3; maar η's komen in een bundel niet voor, zoodat $\mu^4\eta = 0$. Daarentegen is $\nu^4\eta$ het aantal η's in een schaar, dus 3, daarentegen $\nu^4\delta=0$. $x^4\delta$ is het aantal δ's die k^4 in 4 punten raken; dan moet dus elk van de beide lijnen van het paar in 2 punten raken; $x^4\delta$ is dus het aantal paren dubbele raaklijnen van k^4, dat is $\frac{1}{2} . 28 . 27$. Daarentegen is $x^4\eta = 0$; want zulk een η zou 4 klassepunten op k^4 moeten hebben, terwijl ze er slechts 2 heeft. De determinant wordt dus:

$$\begin{vmatrix} x^4 y & \mu^4 y & \nu^4 y \\ \dfrac{28 . 27}{1 . 2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0, \text{ of:}$$

$$9x^4y = \frac{28 . 27}{1 . 2} . 3\mu^4y, \text{ of beknopter:}$$

$$x^4 = 126\mu^4.$$

Dit geldt voor ieder stel ∞^4. Om zulk een stel te krijgen, moet men echter de kegelsneden uit het vlak nog een enkelvoudige voorwaarde opleggen; kiezen we hiervoor μ, dan wordt:

$$x^4\mu = 126\mu^5 = 126; \text{ dus:}$$

door een punt in het vlak gaan 126 *kegelsneden die* k^4 *in* 4 *punten aanraken*; *door een punt van* k^4 *zelf gaan er echter slechts* 63, omdat bij nadering van het punt tot k^4 de oplossingen twee aan twee gaan samenvallen.

Opmerking I. Men kan nu in dit laatste geval het gemeenschappelijke raakpunt p aan de 3 . 63 andere q toevoegen, en de coïncidentieformule:

$$\varepsilon = p + q - g$$

toepassen, om te komen tot de kegelsneden die k^4 vierpuntig, en dan nog tweemaal tweepuntig aanraken. Voortgaande kan men dan komen tot de kegelsneden die zespuntig, en dan nog tweepuntig

---

HOOFDSTUK III.

Meervoudige coïncidenties en de theorie van het n^e graadsoppervlak.

HOOFDSTUK VI.

Het karakteristiekenprobleem.

Alphabetisch Register.

(De getallen wijzen de paragrafen aan).

N.

O.

P.

Q.

R.

NOORDHOFF's VERZAMELING VAN WISKUNDIGE WERKEN

„We stellen er prijs op onze verheugenis te uiten over de wijze, waarop Noordhoff's Verzameling van Wiskundige Werken een tijdperk heeft geopend van opleving in onze vaderlandse wiskundige literatuur. Het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde mag met recht roem dragen op haar initiatief." Weekbl. voor Gymn. en M. O. **Dr. S. L. van Oss.**

Reeds verschenen:

Deel I. **Prof. Dr. Hk. de Vries.** De vierde dimensie. **2e druk.** Gebonden . . . . *f* **3.90**

Deel II. **Prof. Dr. Fred. Schuh.** Grepen uit de moderne meetkunde. 1e deel: Reciproke transformaties in het vlak en in de ruimte. Hyperboloïden en kegelsneden. Harmonische eigenschappen en cirkelbundels. Met 224 figuren in de tekst. Gebonden . . . . *f* **11.40**

Deel III. **Prof. Dr. G. Schouten.** De grondslagen der rekenkunde. Met toepassingen op grenswaarden, oneindige reeksen en producten, gedurige breuken, dubbelreeksen. **2e druk.** Gebonden . . . *f* **3.90**

Deel IV. **Prof. Dr. J. A. Barrau.** Analytische meetkunde. 1e deel: Het Platte Vlak. **2e druk.** Gebonden . . . . *f* **10.20**
2e deel: De Ruimte, gebonden . . . . *f* **14.50**

Deel V. **Prof. Dr. Fred. Schuh.** Leerboek der Theoretische Rekenkunde. 1e deel: Natuurlijke getallen en cardinaalgetallen. Het rekenen in talstelsels en met positieve en negatieve getallen. Binomium van Newton en de stellingen van Fermat en Euler. Onbepaalde vergelijkingen en kenmerken van deelbaarheid. Ontbinding der Faculteiten. Geb. *f* **10.20**

Deel VI. **Prof. Dr. Hk. de Vries.** Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening, en van de Theorie der Differentiaalvergelijkingen.
1e deel: De Differentiaal- en Elementaire Integraalrekening, **2e druk.** Gebonden . . . . *f* **19.20**
2e deel: Integraalrekening, gebonden . . . . - **16.50**
3e deel: Differentiaalvergelijkingen, gebonden . . . . - **19.20**
3 delen in eens besteld . . . . - **48.—**

Deel VII. **Prof. Dr. J. G. Rutgers.** Inleiding tot de Analytische Meetkunde
1e deel: Het platte vlak, gebonden, **2e druk** . . . . . . *f* **6.50**
2e deel: De ruimte, gebonden met atlas . . . . - **6.50**

Deel VIII. **Prof. Dr. Hk. de Vries.** Beknopt leerboek der Projectieve Meetkunde. Gebonden . . . . *f* **7.50**

Deel IX. **Prof. Dr. J. G. Rutgers.** Meetkunde der kegelsneden, gebonden met atlas . . . . *f* **5.—**

Deel X. **Prof. Dr. C. H. van Os.** Moderne integraalrekening. Geb. *f* **5.50**

Deel XI. **Prof. H. J. van Veen.** Leerboek der Beschrijvende Meetkunde
1e deel: Projectiemethoden, gebonden . . . . *f* **6.90**

Deel XII. **Prof. Dr. Fred. Schuh.** Beknopte hogere algebra *f* **15.—**

Deel XIII. **Prof. Dr. Fred. Schuh.** Het getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal. Gebonden . . . . *f* **7.50**

Deel XIV. **Prof. Dr. Fred. Schuh.** Het natuurlijke getal . . *f* **5.90**

Deel XV. **Prof. H. J. van Veen.** Leerboek der Beschrijvende Meetkunde, deel II, Oppervlakken en ruimtekrommen . . . . . geb. *f* **7.75**

Deel XVI. **Prof. H. J. van Veen.** Beknopt leerboek der Beschrijvende Meetkunde . . . . geb. *f* **10.50**

Deel XVII. **Dr. Hk. de Vries.** Inleiding tot de studie der meetkunde van het aantal *f* 4.75 . . . . geb. *f* **5.75**

Deel XVIII. **Dr. C. H. van Os.** Inleiding tot de Functietheorie *f* 4.90 . . . . geb. *f* **5.75**

Intekenaars op het „N. T. v. Wiskunde", „Chr. Huygens" of „Euclides" genieten bij verschijning van deze en andere werken in Noordhoff's fonds belangrijke prijsvermindering.

zullen worden, of uitgevaardigd zouden kunnen worden, geen aantrekkelijk studieobject vormen. Ik zeg er dadelijk bij, dat wij „wet" hier niet in juridische zin moeten opvatten; het is in dit geval een regel, waardoor wij de decimalen van een reëel getal achtereenvolgens kunnen berekenen. Ook kan over de verzameling van alle wetten wel degelijk iets gezegd worden; dat behoort echter tot de diepstgaande onderzoekingen, die Prof. Brouwer op het gebied van de intuitionistische wiskunde heeft ondernomen. Dat evenwel die mathematici, die zich vóór Brouwer op een min of meer intuitionistisch standpunt stelden, het nooit tot een bevredigende theorie van het continuum hebben gebracht, ligt hieraan, dat zij zich een reëel getal steeds als door een wet van te voren bepaald dachten. Zij waren dan gedwongen, of, als Borel, een afzonderlijke „meetkundige" continuumintuitie te onderstellen, of, als de Weense Philosoof Kaufmann, het bestaan van een continuum, dat enigszins op dat van de klassieke wiskunde lijkt, te ontkennen.

Hoeveel eenvoudiger wordt de zaak, wanneer wij keuzenreeksen toelaten! Het continuum is dan eenvoudig de volkomen vrije keuzenreeks. Beperkt men de vrijheid van keuze, dan definieert men bepaalde verzamelingen op het continuum. Schrijven wij bijv. voor, dat de eerste decimaal een 3 moet zijn, dan is daardoor een deelsegment van het eenheidscontinuum bepaald. Schrijven wij voor, dat bij iedere keuze slechts 0 of 1 gekozen mag worden, dan krijgen wij al een veel ingewikkelder verzameling. De eerste keuze beperkt zich tot de segmenten (0; 0, 1) en (0, 1; 0, 2); de tweede zondert uit het eerste de beide segmentjes (0; 0, 01) en (0, 01; 0, 02), uit het tweede (0, 1; 0, 11) en (0, 11; 0, 12) af; de verzameling ontstaat dus als de doorsnede van een oneindige rij verzamelingen, die ieder uit een eindig aantal segmentjes bestaan.

Door de invoering van de keuzenreeksen wordt dus niet alleen een belangrijke vereenvoudiging bereikt, maar tevens een geheel nieuw en origineel veld van wiskundig onderzoek geopend. Het belangrijkste resultaat, dat Prof. Brouwer in deze richting verkregen heeft, is dit, dat iedere in een gesloten interval overal bepaalde functie in dat interval gelijkmatig continu is. Volgens de klassieke wiskunde is dat volstrekt niet het geval: de functie, die voor elke meetbare waarde van x gelijk aan 1 en voor elke

onmeetbare waarde gelijk aan 0 is, is wel een extreem voorbeeld van een functie, die overal bepaald, maar ook overal discontinu is. Een dergelijke functie is echter volgens intuitionistische opvatting geenszins overal bepaald; er zijn immers ook waarden van x denkbaar, waarvan wij niet weten, of zij meetbaar zijn of niet, zodat wij de waarde van de functie voor zulk een waarde van x niet kunnen uitrekenen, en dan bestaat de functiewaarde voor ons ook niet. Een functie is alleen dan voor iedere waarde van x bepaald, wanneer wij de functiewaarde zo nauwkeurig wij willen kunnen benaderen, mits x nauwkeurig genoeg benaderd is. Een dergelijke functie nu blijkt steeds gelijkmatig continu te zijn.

Ik zal nog door een voorbeeld laten zien, hoe ook buiten de leer van het continuum keuzenreeksen kunnen optreden. In de theorie van de oneindige reeksen kent men het begrip „onvoorwaardelijke convergentie". Een reeks $t_1 + t_2 + .. + t_n + ..$ (1), die nu niet uitsluitend positieve termen behoeft te hebben, heet onvoorwaardelijk convergent, als ze convergeert en de som onafhankelijk is van de volgorde van de termen; d.w.z. bij iedere rij natuurlijke getallen $n_1, n_2, ... n_k, ...$, waarin ieder natuurlijk getal juist eenmaal voorkomt, heeft de reeks

$$t_{n_1} + t_{n_2} + ... + t_{n_k} + ... \qquad (2)$$

dezelfde som als (1). Het is duidelijk, dat „iedere rij" hier als „rij van vrije keuzen" opgevat kan worden, mits men de vrijheid van keuze zo beperkt, dat ieder getal eens en niet meer dan eens voorkomt. Dat een getal tweemaal optreedt, kan men voorkomen, door te verbieden, een eenmaal gekozen getal nog eens te kiezen. Dat ieder getal optreedt, bereikt men als volgt. De eerste keuze geeft n_1. Bij de tweede keuze kiezen wij een getal $p_1 > 1$, en verplichten ons daardoor, onder de eerste p_1 getallen n_k het getal 1 te kiezen (dus komt onder de eerste $p_1 - 1$ getallen n_k de 1 niet voor, dan moeten wij $n_{p_1} = 1$ kiezen). De derde keuze geeft n_2; bij de vierde kiezen wij $p_2 > p_1$, waardoor vastgelegd wordt, wanneer op zijn laatst de 2 gekozen moet worden, enz. Bij deze ruimere opvatting van de onvoorwaardelijke convergentie blijft bijv. de stelling gelden, dat iedere absoluut convergente reeks ook onvoorwaardelijk convergeert.

Ik hoop U voldoende aangetoond te hebben, dat de vraag, wat er nu eigenlijk bij de intuitionistische opvatting van de klassieke

wiskunde overblijft, onjuist geformuleerd was, omdat het intuitionisme niet maar een deel van de klassieke wiskunde omvat, maar ten dele de klassieke begrippen splitst, waardoor een klassieke theorie in verschillende naast elkaar verlopende theorieën uiteenvalt, ten dele de klassieke begrippen door nieuwe van geheel andere aard vervangt, en soms ook begrippen vormt, die niet met bepaalde begrippen uit de klassieke wiskunde corresponderen. Van een volkomen verkeerde opvatting getuigt de bewering, dat de intuitionistische wiskunde slechts armzalige overblijfselen van de klassieke zou bevatten. De nieuwe wiskunde zal, als zij voldoende intensief beoefend wordt, tot een even indrukwekkend en harmonisch geheel kunnen uitgroeien als de oude, maar zij zal van geheel andere aard zijn. De vraag, die ik aanhaalde, gaat dus niet alleen uit van een verkeerde opvatting over de intuitionistische wiskunde, maar ook van een onjuist inzicht in de ontwikkeling van een tak van wetenschap in het algemeen. Men vergelijkt de wetenschap dikwijls bij een onbekend land, waarin de onderzoekers onder grote moeite langzaam doordringen, om er steeds meer geheimen van te ontsluieren. Om echter onze vraag te kunnen beantwoorden, zouden wij die onbekende streek als uit een vliegtuig op grote hoogte moeten kunnen beschouwen, om er zo de grote rivieren en de belangrijkste bergen van te overzien. Misschien gelukt het een enkele maal aan een zeer geniale geest, zo de ontwikkeling van een wetenschap voor lange tijd vooruit te zien; de gemiddelde wetenschappelijke onderzoeker is niet aan het vliegen toe. Echter laat de intuitionistische wiskunde zich slecht met een onbekende landstreek vergelijken; dit beeld suggereert te sterk een bestaan van de wiskundige entiteiten ook onafhankelijk van ons denken. Ik wil trachten, er een beter passend beeld voor in de plaats te stellen.

De meesten van U zullen wel eens genoten hebben van die merkwaardige natuurfilms, waarvan Dr. Mol de vervaardiging op het peil van een nieuwe tak van kunst gebracht heeft. Hieronder is een soort, die mij altijd bijzonder heeft getroffen; dat is diegene, waarin wij de kristallisatie van een stof zich zien voltrekken, zoals dit verschijnsel zich onder de miskroskoop voordoet. Men ziet het proces in enkele punten beginnen; van die centra schieten stralen uit, soms langer, soms korter, die weer zijtakken vormen, zodat de takken, die van verschillende centra uit gegroeid zijn, elkander

raken en doorsnijden. Dan plotseling blijkt uit dit schijnbaar uiterst onregelmatige proces een patroon gevormd te zijn, waarvan de harmonie door de tegenstelling des te meer indruk maakt. Nu weer toont de film ons de rand van het kristallisatiegebied en nemen wij waar, hoe het eenmaal gevormde patroon zich over een steeds grotere oppervlakte verbreidt, nu eens met fel uitschietende stralen, dan weer gelijkmatig voortschrijdend.

Ik zie in deze film een beeld van de ontwikkelingsgang van een tak van wetenschap, in het bijzonder van een wiskundige wetenschap. Het is evenmin als het vorige vrij van eenzijdigheid, en geeft misschien een wat te passieve indruk, maar daarvoor geeft het de spontane ontstaanswijze van een wetenschap goed weer. Ook hier wordt het begin nauwelijks opgemerkt: enkele onderzoekers werken onafhankelijk van elkander aan detailproblemen, die schijnbaar niet met elkander samenhangen; anderen bouwen op hun resultaten voort en passen hun methoden op nieuwe problemen toe, tot uit hetgeen eerst een willekeurig vraagstuk was een omvangrijke theorie is gegroeid. Theorieën, die in verschillende uitgangspunten hun oorsprong hadden, gaan elkander raken, doordat zij hetzelfde probleem ieder met hun eigen methoden aanpakken, of juist die methoden bepaalde punten van overeenkomst blijken te bezitten; zij vlechten zich zo steeds meer door elkander. Dan is de tijd gekomen voor diengene, wien het gegeven is, in de schijnbare chaos van ideeën en methoden de innerlijke harmonie, het verrassend eenvoudige patroon te zien, en daarmede een nieuwe tak van de wiskunde te grondvesten. Gewoonlijk blijkt dan al spoedig, dat de nieuwe begrippen en methoden op veel meer problemen van toepassing zijn dan men oorspronkelijk meende, en dat zij een steeds groter deel van de wiskunde onder hun invloed brengen, tot ten slotte de voortdurende herhaling van hetzelfde patroon vervelend gaat werken en vanzelf tot een einde komt. Een enkel voorbeeld: In zijn beroemde Erlanger Programm overzag Felix Klein de harmonie van het patroon, dat de meetkundige onderzoekingen van zijn tijd vormden, maar dat voor hem niemand er in had gezien; later schreef hij zelf daarover: „Das Erlanger Programm gehört zu denjenigen Schriften, welche zu neuem anregen wollen, indem sie Vorhandenes ordnen", en inderdaad heeft het een krachtige stoot gegeven zowel aan de ontwikkeling van de meetkunde als aan die van de groepentheorie.

Willen wij nu de ontwikkeling van de intuitionistische wiskunde bestuderen, dan kunnen wij niet met de afsluiting, met een algemeen programma beginnen. Evenals bij de vorming van kristallen veel afhangt van de juiste samenstelling van de oplossing, is voor het beoefenen en begrijpen van de intuitionistische wiskunde allereerst de juiste geestelijke instelling nodig. Wanneer ik die met enkele woorden moet omschrijven, kan ik niet anders zeggen dan: zo vrij en natuurlijk mogelijk. Nadat men zich eenmaal het inzicht eigen heeft gemaakt, dat het bestaan onafhankelijk van ons denken van wiskundige entiteiten geen legitiem bewijsmiddel in de wiskunde is, en dat de uitdrukking, dat een wiskundige entiteit „bestaat" niets anders kan betekenen dan dat wij ze in gedachten hebben opgebouwd, doen wij goed, ons niet op bepaalde grondelementen of constructieprincipes vast te leggen. Als punt van uitgang doet zich vanzelf de rij der natuurlijke getallen voor; het zou echter onjuist zijn, al datgene voor zinloos te verklaren, dat zich niet tot relaties tussen bepaalde natuurlijke getallen laat herleiden, of behalve operaties met eindige verzamelingen slechts de volledige inductie als constructiemiddel te erkennen. Door dergelijke min of meer willekeurige beperkingen ontstaat het gevaar voor een dogmatische instelling, die de ontwikkeling slechts kan schaden.

Wat nu de in concreto bewerkte delen van de intuitionistische wiskunde betreft, bevinden wij ons nog bijna overal in het eerste stadium. Er beginnen zich kristallisatiekernen te vormen, grotendeels onafhankelijk van elkander. Uit verschillende gebieden van de wiskunde kiezen wij problemen, waaraan wij hopen, de karakteristieke moeilijkheden van zo'n gebied te leren kennen. Het is noodzakelijk, een dergelijk probleem tot in details te onderzoeken, omdat de ervaring leert, dat zich dikwijls moeilijkheden voordoen waar men die niet verwacht. Een treffend voorbeeld hiervan is de zogenaamde algorithme van Euclides, d.i. het bepalen van de GGD door deling, en wel in zijn toepassing op veeltermen. Wanneer twee veeltermen in x gegeven zijn, bijv.

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots\ldots + a_m;$$
$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots\ldots + b_n,$$

waarbij $m \leqq n$, dan beginnen wij met $g(x)$ door $f(x)$ te delen. Is de rest van deze deling

$$r_1(x) = c_0x^p + c_1x^{p-1} + \ldots\ldots + c_p \qquad (p < m),$$

dan delen wij $r_1(x)$ op $f(x)$; de rest van deze deling delen wij op $r_1(x)$, enz. Gaat een deling op, dan is de laatste deler de GGD van f en g. Dit schijnt nu op het eerste gezicht een bij uitstek intuitionistische methode; er wordt immers een rekenwijze aangegeven, waardoor wij de GGD werkelijk kunnen berekenen. En toch schuilt hier een adder onder het gras. Laten wij aannemen, dat de coëfficienten reële getallen zijn. Men kan met de eerste deling slechts beginnen, als men $\frac{b_0}{a_0}$ kan berekenen; daarvoor is nodig, zoals ik reeds opmerkte, dat a_0 aanwijsbaar van 0 verschilt. Laten wij een veelterm, waarvan de coëfficient van de hoogste macht aanwijsbaar van 0 verschilt, regelmatig noemen. De eerste deling is dus uitvoerbaar, mits f regelmatig is, hetgeen wij zonder bezwaar kunnen onderstellen. Opdat wij de tweede deling kunnen uitvoeren, moet echter $r_1(x)$ regelmatig zijn; dit zal aan de gegeven veeltermen niet direct te zien zijn. Om zeker te zijn, dat het gehele proces uitvoerbaar is, moet men eisen, dat alle veeltermen, waardoor achtereenvolgens gedeeld wordt, regelmatig zijn; deze eis legt aan f en g een zo zware beperking op, dat het algemene karakter van de algorithme volkomen verloren gaat. Wij zien ons dus voor de noodzaak geplaatst, een theorie van de deelbaarheid van veeltermen op te bouwen, onafhankelijk van de algorithme van Euclides, dus geheel verschillend van de klassieke theorie. Dit leidt vooral tot belangrijke consequenties, wanneer men niet onderstelt, dat de coëfficienten reële of complexe getallen zijn, maar wanneer zij tot een willekeurig lichaam kunnen behoren. Dergelijke verrassingen geven aan het werken op dit gebied een bijzondere bekoring, maar zij maken anderzijds een uitgebreide detailstudie op alle gebieden van de wiskunde noodzakelijk. Eerst nadat veel meer gebieden doorvorst zullen zijn en veel vollediger dan nu het geval is, zal men tot een synthese kunnen komen. Men zal de moeilijkheden, die zich op verschillende gebieden voordoen, kunnen classificeren, men zal methoden vinden om moeilijkheden van een bepaalde soort te overwinnen, en zo vele detailbeschouwingen uit de eerste periode overbodig maken. Dan zal het misschien ook mogelijk worden, de vraag, hoe de intuitionistische wiskunde er eigenlijk uitziet, in het algemeen te beantwoorden.

Intusschen zijn er ook nu wel onderdelen, waar de periode van het detailonderzoek voorbij schijnt en het patroon zich duidelijker

aftekent. Dit zijn juist die gebieden, waar van de oude wiskunde het minste overbleef, zodat een nieuwe opbouw van de grond af noodzakelijk was, zoals de verzamelingsleer. Reeds de eerste publicaties van Prof. Brouwer over dit onderwerp vertoonden een zodanig afgeronde vorm, dat zij het detailonderzoek, dat ongetwijfeld ook hier, zij het in het verborgen, voorafgegaan is, verre overschreden, en overal de grote lijnen van de theorie toonden. In de theorie van de puntverzamelingen blijkt in dit opzicht vooral het begrip van een „catalogisering”, dat ik hier slechts noemen kan, zeer vruchtbaar.

Heb ik tot dusver de intuitionistische wiskunde als geheel op zichzelf staand besproken, dan moet ik nu opmerken, dat haar ontwikkeling ook door invloeden van buiten beinvloed zal worden. Het zou haar prestige buitengewoon verhogen, als het gelukte, er de theoretische physica op te grondvesten; dit zou bovendien naar mijn mening uit philosophisch oogpunt van groot belang zijn. Het zou mij te ver voeren, uitvoerig op de philosophie der natuurkunde in te gaan; ik wil slechts opmerken, dat onze natuurwaarneming en de verwerking tot ervaring een proces vormen, waarin onze geest actief optreedt op een wijze, die veel overeenkomst vertoont met hetgeen in de intuitionistische wiskunde geschiedt. Het zou tot de eenheid van de wetenschap veel bijdragen, als de beide gebieden tot een eenheid konden worden samengesmolten.

Op het eerste gezicht schijnt het, alsof het vanzelf spreekt, dat de wiskunde, die in de natuurkunde wordt toegepast, intuitionistisch is. Een physische theorie heeft immers slechts zin, wanneer zij aan de ervaring getoetst kan worden. Dit gaat practisch zo, dat de theorie voorschriften geeft voor de berekening van zekere getallen, die dan met uit proefnemingen gevonden getallenwaarden moeten kloppen. De voorschriften van de theorie zijn noodzakelijk rekenaanwijzingen in intuitionistische zin. Oorspronkelijk vatte men de theorie ook zo op, dat met iedere daarin optredende grootheid een principieel meetbare grootheid bij het experiment moest overeenkomen. Langzamerhand heeft zich echter het wiskundige apparaat van de theoretische physica zo uitgebreid, dat vele gedeelten daarvan niet direct betrekking op ervaring hebben, doch slechts enkele gevolgtrekkingen principieel verifieerbaar zijn. Men zou de theorie kunnen vergelijken met een meer-electrodenlamp, zoals die aan radiotoestellen gebruikt worden, en de natuur

met een fitting. Past de lamp in de fitting, dan is de theorie juist. Het beeld is zeer summier, maar het illustreert twee eigenaardigheden van de moderne natuurkunde: ten eerste, dat grote gebieden van de theorie niet direct met de ervaring verband houden, terwijl toch de theorie als zodanig een samenhangend geheel vormt, ten tweede, dat bij ieder experiment niet een bepaalde vergelijking of een bepaalde onderstelling geverifieerd wordt, maar de gehele theorie.

Die gedeelten van de theorie nu, die min of meer los van de ervaring staan, zijn dikwijls intuitionistisch zeer aanvechtbaar. De taak, een intuitionistisch fundament aan de moderne natuurkunde te verschaffen, is dan ook geweldig groot; voorlopig kan zij slechts een richtsnoer zijn, een ver baken, dat richting aan onze onderzoekingen kan geven.

Nu ik het einde van deze les nader, kom ik nog even terug op het beeld van de kristalfilm. Wij weten, dat voor de indruk, die de film maakt, de compositie zeer belangrijk is. De vervaardiger kiest die gedeelten van het fotografische materiaal uit, die hem het geschiktst lijken en rangschikt die zo, dat het geheel zo indrukwekkend mogelijk wordt. Ten opzichte van de wetenschap valt deze taak ten deel aan den leerboekenschrijver en den docent. Het stemt mij tot grote voldoening, dat ik in staat ben gesteld, deze taak voor de intuitionistische wiskunde op mij te nemen.
